

## FOREWORD

Convinced of the educational and national value of the use of Indian Languages in Indian Universities, the Academic Council of Nagpur University, on 12th September, 1946, resolved that Hindi and Marathi shall be the media of instruction in the University for the Intermediate courses in Arts and Science from the academic year 1949-50 and for the courses for the B. A. and B. Sc., from the academic year 1951-52. And from the same dates English shall cease to be the medium of instruction in the University.

While co-operating whole-heartedly in the prolonged All-India deliberations for the long-range planning for introduction of Indian languages as media of instruction, Nagpur University has—except as regards postponement of the scheme in respect of the science courses for one year—stuck to its schedule, endeavouring, with all its limitations, to surmount the imme-

diato practical difficulties in carrying through a linguistic transition of this magnitude.

2 These difficulties are, in the main, the three 'T's of Terms, Text books and Teachers

Thanks to the timely initiative and generous support of its Government, it was possible for the State of Madhya Pradesh to obtain the services of Dr Raghu Virz of the International Academy of Indian Culture of Lahore and to entrust him with the formidable but foundational task of coining and adapting the technical terms of science for the needs of the new linguistic media. Dr Raghu Virz, who had already devoted a considerable part of his life to a scientific approach to the problem of technical terms has proceeded to his task on the basic principle of *allied words for allied ideas*, derived from the Sanskrit roots. He has reduced the problem of coining terms almost to an art, an art as fine as it is useful.

3 These terms have been coined and adapted in close collaboration with a band of experienced and enthusiastic teachers of science deputed by the State Government at the same time to prepare suitable text books of science

under the general direction and guidance of Dr. Raghu Vira

They have so far prepared fourteen text-books each with a Hindi and a Marathi version dealing with the Intermediate Science courses in Algebra, Trigonometry, Solid Geometry, Co ordinate Geometry, Statics, Dynamics, Physics (Theory), Practical Physics, General and Inorganic Chemistry, Organic Chemistry, Practical Chemistry Zoology, Botany (Theory) and Botany (Practical)

The manuscripts of these text-books, when received from the Government, were referred by the University to its Board of Studies in the various subjects and, on receipt of their reports, the Academic Council decided, on 8th December, 1949 that, subject to certain specified changes, they be recommended as suitable for the Intermediate Science courses of the University

4 Finally, in accordance with a suggestion of the State Government and with the help of an appropriate Government grant, the University decided in April, 1950, to undertake the publication of these first text books prepared for its courses in science Their printing is now

in progress and seven of these—both Hindi and Marathi versions—which are required for use in the first year of the Intermediate courses are being published today.

5 In the special position occupied by the the Universities of the Madhya Pradesh, it has been necessary to publish these books both in Hindi and Marathi. This has added to the labour and the cost involved. At the same time it has given us a unique advantage we have here an opportunity of piloting an educational experiment in a regional language and at the same time in the language of the Union. The inter action of the two parallel series of lectures and text books in the same University—and in many cases in the same college—will, I am confident, prove valuable for the emergence of both Hindi and Marathi as more perfect media of higher education than they can claim to be at present.

6 As regards the change of medium for the Intermediate Arts courses, this has already been brought into force from the academic year 1949-50. The proposal for preparation and publication of text books specially designed for

the needs of the University is still under the consideration of the authorities. It was, however, thought desirable not to postpone the operation of the scheme in respect of the Arts courses as (i) the number of technical terms required for Arts is much smaller, as compared with those required for Science, and (ii) a certain number of text-books of the Intermediate Arts standard are already available, both for Hindi and Marathi. For certain subjects, glossaries of technical terms which will serve the preliminary needs of the teachers and the students have also been prepared by the University Boards of Studies. It is further hoped that it would soon be possible to adopt a scheme for preparation of text books for Arts subjects also.

7. At the transitional stage, the problem of teachers adequately qualified to give instruction through the Indian languages presents another hurdle. For reasons, both historical and geographical, the colleges of Madhya Pradesh have been fortunate in having on their staff teachers who, between themselves, can claim almost all the principal spoken languages of India as their mother-tongues. At the present stage,

however, this creates an immediate difficulty in re-organizing the teaching arrangements on the new basis. The University is, however, confident that, where necessary, the teachers will avail themselves of the existing opportunities of acquiring a fairly good knowledge of the language of the Union or a language of their region and that the teachers and the management will, between themselves, so arrange the teaching programmes of colleges that the transition to the new media is made both smooth and effective

No formal test for imparting instruction through the new media has accordingly been prescribed by the University

8 The final shape of the cultural media of the new India will, after all, be moulded by that intellectual commerce between the teacher and the taught which we call University education. The scheme of Nagpur University leaves the choice as between the Sanskritic technical terms and their equivalents to the teachers and the students themselves. The text-books being published under the scheme give the new Sanskritic technical terms as well as their English equi-

valents and both teachers and students are, at the present stage, permitted to use either of them according to their convenience and requirements. Adoption of this course cuts across the prevailing controversy with regard to the structure of technical terms and, at the same time, gives the newly-coined terms an opportunity to be judged on their own merits along with their English competitors in the academic field.

9. Progress in education requires both individual experiments and general planning, local initiative as well as central direction. It would hardly be proper to be dogmatic about their order of priority and, in the case of a great linguistic transition at the University stage, the problem require to be attacked on all fronts. The Conference of Education Ministers and Vice-Chancellors of India convened by the Ministry of Education in New Delhi in January, 1948, had recommended five years as the time-limit within which Indian Universities should make the requisite preparations for commencing their instruction through the Indian languages. The Indian Universities Commission has, however, wisely left the determination of the duration

of the preparatory period to the interplay of the various educational and social factors that operate in Universities. Adoption of such a course would leave each University freedom to regulate the pace of its linguistic progress according to its own needs, resources and limitations.

10 Change in the medium of instruction at different dates in different Universities no doubt gives rise to fresh problems. Each of these has, however, to be tackled by an intelligent and sympathetic administrative approach. One of these difficulties evidently relates to the migration of students from one University to another—a process which, I hope will in the national interests, receive every encouragement in the future. The difficulty in this respect, however, would not seem to be so formidable as it might appear at first sight, if we remember that (i) English text books in each subject will be recommended along with the Hindi and Marathi text books for use of students, (ii) students and teachers will for the present, be familiar both with the Hindi or Marathi terms and with their English equivalents, and (iii) English will continue to be a compulsory subject both for



the Intermediate and for the first degree courses in Arts and Science

The same considerations would seem to apply to the apparent difficulties in respect of All-India Competitive Examinations. With the goodwill and determination shown by the builders of the new constitution of India, there is good reason for hoping that English may soon cease to be the sole medium for the All India Competitive Examinations. The institution of the language of the Union as the medium of instruction and examination in the Indian Universities should itself accelerate the pace of progress towards this transition.

11 I venture to hope that this series of books will prove useful not only for the State of Madhya Pradesh, but also for other States in their efforts to adopt a regional language or the language of the Indian Union as the media of instruction at the University level. The present effort is necessarily imperfect. We can write good books in Hindi and Marathi only if we can do original thinking in Hindi and Marathi, as we do in English today. Yet we can hope to do our thinking in Indian languages only when we have

some written material to stimulate and sustain our thinking in these languages. It is a vicious circle that has to be broken and the present series of books is an organised attempt to break it. Deeper thought, practical experience, national planning and local variations will, I have no doubt, change the shape of much of what is written in these text-books. If, however, they serve even as a raw material on which these forces can play to mould them according to our varying requirements, the labour of those who have worked during the last four years for making this new academic venture a success will have been amply rewarded.

The J N Tata University  
Convocation Hall, Nagpur.  
15th August 1950

*K. L. Dubey*  
Vice-Chancellor,  
Nagpur University.

## INTRODUCTION\*

"It is India that gave the ingenious method of expressing all numbers by means of ten symbols, each symbol receiving a value of position, as well as an absolute value, a profound and important idea which appears so simple to us now that we ignore its true merit, but its very simplicity, the great ease which it has lent to all computations, puts our arithmetic in the first rank of useful inventions.

"Even though there has been a slow growth of ideas in the history of human civilization, the history of reckoning presents a peculiar picture of desolate stagnation. When viewed in this light, the achievement of the unknown Hindu, who sometime in the first centuries of our era discovered the principle of position, assumes the proportion of a world event.

"The invention of śūnya or zero liberated the human intellect from the prison bars of the Greek counting frame. Once there was a sign for the empty column,

---

\* In writing the Introduction in English I have followed the wishes of Lt. Col. Shri K. L. Dabey, the Vice-Chancellor of the Nagpur University. It is hereby intended to introduce the book to such teachers as know neither Hindi nor Marathi.

'carrying over' on slate, paper or other material for writing was just as easy as carrying over on the abacus.

'Aryabhata about A D 470 discusses the rules of arithmetic uses the law of signs of Diophantus, gives a table of sines in intervals of  $3\frac{1}{2}$ , and evaluates — as 3 1416 In short, Hindu mathematics starts where Alexandrian mathematics left off Just a little later, in the sixth century, comes Brahmagupta, who follows the same themes as Aryabhata calculation, series, equations These early Hindu mathematicians had already stated the laws of 'ciphers' or *śūnya*, on which all our arithmetic depends, namely,

$$a \times 0 = 0$$

$$a + 0 = a$$

$$a - 0 = a$$

Equipped with their simple and eloquent number symbols the Hindus broke away completely from the metaphorical way of dealing with fractions They wrote fractions as we write them and as they had an arithmetic which lent itself to rapid calculation without mechanical aids, they experimented with them as with whole numbers. Thus Mahavira (A D 850) gave our rule for dividing one fraction by another in the same words which a school teacher might use today 'make the denominator the numerator and then multiply

"All the algorithms for fractions now used were invented by the Hindus

---

\* To this is to be added

$$\frac{a}{0} = \infty$$

"Is it not equally strange that algebra that corner stone of modern mathematics also originated in India and about the same time that positional numeration did ?

"The advance from 'rhetorical' discussion of rules for solving problems to symbolism of the modern sort was wellnigh impossible for the Greeks, who had already exhausted the letters of the alphabet for proper numbers. Although the Hindu numerals removed this obstacle to progress, there was at first no social machinery to impose the universal use of devices for representing operators. The only operative symbol which was transmitted to us by the Arabs from Hindu sources is the square root sign ( $\sqrt{\quad}$ )."

*Prof. Lancelot Hogben*

उत्तरादक यत्प्रवदन्ति बुद्धेरधिष्ठित सत्पुरुषेण सादया ।

व्यक्तस्य वृत्तस्य तदेव बीजमन्यत्तमीश गणितं च वन्दे ॥

(Bhaskaraċharya, 12th century A D)

Algebra is बीज, बीजक्रिया or बीजगणि, the science of analysis, the operation or computation with 'seeds'. It was also known as बुद्ध-गणित or simply बुद्ध (which dealt particularly with indeterminate equations of the first degree) Another name was अव्यक्त गणित 'calculations with unknowns' as against व्यक्त गणित 'calculation with knowns' used for arithmetic and geometry.

According to our ancients, the values of symbols in arithmetic are व्यक्त that is definitely determinate while in algebra they are अव्यक्त that is indefinite. Bhaskara charjya clearly said that the science of अव्यक्त गणित is the source of the science of calculation with knowns

Ancient Hindu algebra comprised the laws of signs, the arithmetic of zero and infinity, operations with unknowns, surds, indeterminate equations of the first degree and the square nature or the so called Pellian equation. To these may be added concurrence and dissimilar operations.

Algebra began early in India during the Vedic age. The geometrical method of the transformation of a square into a rectangle having a given side is equivalent to the solution of a linear equation in one unknown—

$$ax = c^2$$

Vedic fire altars were constructed in different geometrical designs. One of them was the ayna chiti (in the form of a falcon). Its body consisted of four squares, each of its wings a rectangle, and so on. This fire altar was enlarged in two ways—firstly, so that all the constituents were affected in the same proportion, secondly, so that the breadth of a portion of the wings was left unaffected. If  $x$  be the unit for enlargement in the first case we shall have to solve the quadratic equation

$$2x \times 2x + 2 \left\{ x \left( x + \frac{x}{5} \right) \right\} + x \left( x + \frac{x}{10} \right) = 7 \frac{1}{2} + m,$$

where  $m$  denotes the increment of the fire altar in size

$$\text{Therefore } x^2 = 1 + \frac{2m}{15}$$

In particular, when  $m=94$ , we shall have

$$x^2 = 13\frac{8}{15} = 14 \text{ (approximately),}$$

which occurs in the Satapatha Brahmana

In the second case of enlargement the equation for  $x$  will be

$$\begin{aligned} 2x \times 2x + 2 \left\{ x \left( x + \frac{1}{5} \right) \right\} + x \left( 2 + \frac{1}{10} \right) \\ = 7\frac{1}{2} + m \end{aligned}$$

$$\text{or } 7x^2 + \frac{1}{2}x = 7\frac{1}{2} + m$$

which is a complete quadratic equation

The problem of altar construction gave rise also to certain indeterminate equations of the second degree such as,

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

$$(2) \quad x^2 + a^2 = z^2$$

and simultaneous indeterminate equations of the type

$$ax + by + cz + du = p,$$

$$x + y + z + u = q$$

**SYMBOLS OF OPERATION**—The first syllable of a word, placed before or after the quantity served the purpose of the symbol. For addition one of the Sanskrit words is  $\Sigma$  It is abbreviated to  $\Sigma$  Similarly the ancient Brahmi  $\pi$ , which is a cross, stands as the symbol of subtraction,

being the abbreviation of गुण  $\equiv$  abbreviated from गुणन or गुणित stands for multiplication and भा from भाग or भाजित for division. Often these symbols are not used. Juxtaposition serves the purpose. The use of these symbols is best illustrated by the Bakhshali manuscript Bakhshali is a village in the Peshawar district The manuscript lay between stones It was discovered by a farmer who was digging in the mounds in 1881 This is the oldest mathematical manuscript yet discovered It is written in ancient Sarada script of Kashmir on birch bark Its age has been variously estimated some placing it in the second century (in the days of Kanishka), others as late as the twelfth century A D

$$\begin{array}{ccc} 0 & 4 & \\ 1 & 1 & \text{गु} \end{array} \quad \text{means} \quad \frac{x}{1} + \frac{6}{1}$$

$$\begin{array}{ccc} 11 & 6 & \\ 1 & \text{गु} & 1 \end{array} \quad \text{means} \quad \frac{11}{1} + \frac{6}{1}$$

(folio 59 recto)

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 10 & \text{गु} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \end{array} \right] \text{ means } 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 10$$

(folio 47 recto)

$$\begin{array}{c} 0 \mid 1 \ 2 \mid 2 \ 4 \mid 2 \ 6 \mid 4 \ 8 \mid \\ 1 \mid 1 \ 2 \mid 1 \ 2+ \mid 1 \ 2 \mid 1 \ 2+ \mid 1 \ 2 \mid \end{array}$$

means

$$x \left( 1 + \frac{3}{2} \right) + \left\{ 2x \left( 1 + \frac{3}{2} \right) - \frac{5x}{2} \right\}$$



$$+ \left\{ 3x \left( 1 + \frac{3}{2} \right) - \frac{7x}{2} \right\} + \left\{ 4x \left( 1 + \frac{3}{2} \right) - \frac{9x}{2} \right\}$$

(folio 25 verso, mutilated)

१	१	१	१	भा	२५
१+१	१	१			
२	२	४+४			१

$$\text{means } \frac{36}{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right)}$$

(folio 13 verso)

४० भा	१६०	१३
१	१	१
		२

$$\text{means } \frac{160}{40} \times 13 \frac{1}{2}$$

(folio 42 recto)

०	५	यु	०	स	०	७	+	मू	०
१	१		१		१	१		१	

$$\text{means } \sqrt{x+5}=s, \sqrt{x-7}=t$$

(folio 59 recto)

०	२	१	३	३	१२	४	दइय	३००
१	१	१	१	१	१	१		१

$$\text{means } 1 + 2x + 3 \times 3x + 12 \times 4x = 300$$

(folio 23 verso)

In later times there was a change of plan in the writing of equations. Here are two illustrations, one from Pṛithūdakaśvāmī (860 A.D.) and the other from Bhāskarāchārya (1150 A.D.)—

(१)	या व =	या १०	रु १
	या व १	या ०	रु १

writing  $x$  for या

$$x^2 + 0x + 10 = 8$$

$$x^2 + x + 0 + 1$$

$$\text{or } cx^2 + 10x - 8 = x^2 + 0x + 1$$

$$\text{which means } 10x - 8 = x^2 + 1$$

(२)	या ५	का ८	नी ७	रु ९०
	या ७	का ९	नी ६	रु ६०

writing  $x$  for या,  $y$  for का and  $z$  for नी

$$5x + 8y + 7z + 90 = 7x + 9y + 6z + 00$$

Equations were classified as यावत् तावत् (simple), वग (quadratic), घन (cubic) and बगवग (bi quadratic). The स्थानागसूत्र of Jainas (सूत्र ७५७) is sometimes interpreted to refer to these equations. Another classification of equations is according to Brahmagupta of 628 A D एकवर्ग समीकरण, अनेकवर्ग-समीकरण and भाषित i.e. equations in one unknown in several unknowns and such as involved products of unknowns. एकवर्ग समीकरण is further subdivided into linear equations and quadratic equations अव्यक्तवर्ग समीकरण

It would be interesting to follow the ancient algebraists of India one by one and century to century. But it would be outside the scope of this small introduction. Here I shall mention in passing a point or two which are of particular interest for the history of mathematics. In 850 A D Mahavira a Jain author, wrote an epoch making work गणित सारसंग्रह. He knew that the quadratic has two roots and he employed the modern rule for finding the root of a quadratic



The algebraic terminology was worked out in collaboration with Dr Braj Mohan, M A, Ph D, of the Banaras Hindu University Shri N A Shastri, M Sc, (Lond), Asst Prof of Mathematics Mahakoshal Mahavidyalaya Jabulpore and Shri V M Dabadghao, M Sc, Asstt Professor of Physics Vidarbha Mahavidyalaya, Amraoti Shri Dabadghao is a physicist and his collaboration was of special value in exploring the use of symbols in physics and mathematics before finally deciding upon the Devanagari letters Shri V M Dabadghao Shri N A Shastri and a number of their collaborators worked on the symbols for month on end A complete list of mathematical symbols in Devanagari has been printed and is available separately English abbreviations have their counterparts in Hindi and Marathi, e.g. log (logarithm) — ल (ल०)

Our rock bottom is formed by ancient words— अ०, numerator, degree अंक digit अन्तर distance अपेक्षित required, आदेश substitute, आरोही ascending उपपत्ति proof करणी surd, क्षितिज horizon श्रृंखला series, दिग्गुणन cross multiplication समीकरण equate निवचन interpretation निदर्शन illustration, बीजगणित algebra, मूल root, radical (the European words are translations from Sanskrit) योग sum, राशि quantity लब्धि quotient, अपरत्व multiple, हर denominator सारणी table, etc, etc

Then there are words of common usage—अग्र leading, अवल constant अनियत indefinite अनुसंधान investigation आधार base, आवर्ती recurring उच्चतम highest उन्नयन raising, स्वतन्त्र identity, चल variable, निर्णायक determinant, नियन

law, पक्ति row, प्राकृतिक natural, महत्तम greatest, रेखा line, रेखीय linear, लक्षण characteristic, वास्तविक real, विवेचय discriminant, निस्तार expansion, साधारण common, सामान्य general, सीमा limit, etc., etc.

Our ancients used a variety of terms to denote the same idea or the same term to denote various ideas. For us it was neither desirable nor possible to use one word for more than one idea or more than one word for the same idea. We had to use definite terms so that there be no confusion as to what is meant. Thus कर्ण is used for the hypotenuse as well as the diagonal रूप means form, arithmetical unit, integral numbers, known or absolute number, and a known quantity as having specific form. Similarly दण appears for the letters of the alphabet for an unknown magnitude or quantity in algebra, for the figure 1 in arithmetic and according to some for ■ coefficient.

For quotient we have भाग, लब्धि, भात, भासि, अवाप्त अवाप्ति, फल, लब्ध. For coefficient we have गुण, अंक प्रकृति वर्ण and यादव् कावत्. The coefficient of a root in algebra is मूलगुण. Here गुण is an agent noun, meaning a multiplier, equivalent to गुणक. For multiplication itself, Sanskrit mathematical literature shows a variety which is unsurpassed—गुणन, गुणता, हनन, हति, हत, अभिहति, वध, वर्गणा, पूरण, अभ्यास, शोध, प्रत्युत्पन्न अनुपात stands for proportion, arithmetical progression and rule of three.

Our mathematical terminology is not an isolated

list. It is in consonance with the rest of our scientific terminology, in particular with physics.

The specific terms used in algebra are not very many. They are few and simple. Those requiring a word of explanation are listed below.

- अनावर्तः 'nonrecurring' is from आवर्त 'recurring'. आवर्तन is 'recurrence'.
- अनुपाती 'proportional'. अनुपात 'proportion' is well-known.
- अन्यथा 'aliter.' Aliter is a Latin word meaning otherwise. For the Indian student अन्यथा has its parallel formations in यथा, तथा, etc.
- अपवर्त्य 'multiple' from अपवर्त 'the divisor', अपवर्तक 'the common measure', अपवर्तन 'reduction of a fraction to its lowest term, division without remainder, divisor.' अपवर्त्य is widely used.
- असम्येय in a faithful translation of incommensurable, element by element, म-अ- + -com- -न- + mensurare + मा + -able -य.
- आदेश 'substitute' is well-known to students of Sanskrit, e.g. पाणिनि इव निबन्धादेशोऽनल्लिख्यः.
- क्रमश्च and मञ्च for 'permutation' and 'combination' respectively are self explanatory terms and have been used as being clearer and more definite than भावना for combination and व्यवस्था for permutation.

- छेदा 'logarithm'. According to नेमिचन्द्र the Jain author of त्रिलोकमार if  $x=2^n$  then  $n$  is called the अर्धच्छेद of  $x$ . छेद is the number of times a particular number can be divided by a base. If  $64=4^3$ , then 3 represents the number of times that 64 can be divided by 4. Literally छेद is 'cutting' and the number of times that the division can take place is छेदसंख्या or simply छेदा. In  $64=4^3$ , 3 is the log of 64 to the base 4.
- दशमिर्वाण 'mantissa' The Indian word is crystal clear while the English word is perfectly opaque. In Latin it meant an addition, make weight. The word is believed to be of Etruscan origin. This word has gone out of use in general English, where it meant an addition of little value. In mathematics it denotes the decimal part of a common logarithm.
- निष्पत्ति for 'ratio' is used not only in Hindi but also in Bengali and elsewhere, e g., in the Modern Anglo Bengali Dictionary by Charn Chandra Guha.
- प्रति छेदा 'anti logarithm from छेदा 'logarithm'.
- प्रतिनिधान to represent प्रतिनिधि for representative is well known.
- धित 'function (for explanation see the Glossary)
- मापक is clearer than English 'modulus' which literally means 'a small measure

time, until it was approved by all of us concerned. The Hindi version was next rendered into Marathi by Kumari A. Date. The two versions were carefully compared by Shri Shastri, Shri Shrivastava and Kumari Date. Finally the book was submitted to the Board of Studies in Mathematics of the University of Nagpur, which while proposing that the book be recommended in the Intermediate Examination in Science of the University made a number of suggestions for improvement, which have been duly incorporated.

\*     \*     \*

During the course of last three years, I have had the privilege of enjoying the kind sympathy of the Hon'ble Pt. Ravi Shankar Shukla, the Chief Minister of Madhya Pradesh. To the Hon'ble Shri D. K. Mehta, my debt of gratitude is immense. It is he who, as the Finance Minister of the State, set the ball rolling. The Hon'ble Pandit Dwarka Prasad Mishra with his unbounded love for Hindi, has been taking personal interest and has gone so far as to establish a special department for the purpose of establishing Hindi and Marathi as the languages of this State. To Lt. Col. N. Ganguli the Education Secretary in 1947-48 and his successor Dr. V. S. Jha, I am indebted, for giving top priority to my requirements. Since the establishment of the Languages Department in January 1950, Shri A. R. Deshpande, the Under-secretary, has been extending to me his wholehearted cooperation.

My very special thanks are due to Lt. Col. Kunji



Lal Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University. It is due to his love for Hindi and Marathi that the Nagpur University is leading India in the matter of introducing Hindi and Marathi as the media of instruction. It was again due to him that the Nagpur University has taken the heavy responsibility upon itself of publishing the text books that were prepared under the orders of the Government of Madhya Pradesh.

Lastly my thanks are due to my colleagues, the authors of the text-books who have been with me for the last three years. They have worked devotedly, fully convinced of the service that they are rendering to the nation. They have considered their work to be their reward.

Raghu Vira

---

Hereafter follow three facsimile pages of the Bakhshali manuscript. Their contents are transliterated into Devanagari, followed by the same rearranged so as to be better understood, and finally an English translation—Raghu Vira

## Bakhshali Manuscript

## Folio 13 verso

(a) Transliterated from ancient Śīradā into Devanagari

[illegible]

(b) Rearranged

(१)	०	भा०	द्रो०	१९	फल १०॥	०	फल द्रो०	१९ भा०
	१			१		१		
	२		भा०	२		२		२ प्र० ०कु० २
	४			४		४		
	१		प्र०	०		१		
	४			४		४		
	१		कु०	२		१		
	४			४		४		
			प्र०	१		१		
				४		४		

(३) चक्षुः । कस्याप्यङ्गैरयं पृष्ठि रजदलेन क्षय गत ।  
 पुन वृद्धपा विभागेन स्वपादेन तन्नेष्टितं  
 वृद्ध पा तु पचभागेन च तथा वृद्धि द्वयो गत ।  
 वा वृद्धि स्वा किं वा दोष तदुच्यते ॥

१०	१		१		२		२		
९	१		१		२		१		१
		+							
			२		४		५		

स्व ता जाता ३६ ॥

मादक वस्तुनाश

१	१	१	१	१	मा०	१६	पृष्ठ ६० ॥
	१	१	१	१		१	
	+		+				
२	२	२	२	२			

Continued on the next page

$$\begin{array}{c|c} ६० & \\ \hline २ & \\ २ & \\ + & \\ \hline २ & \\ २ & \\ २ & \\ + & \\ \hline ४ & \\ २ & \\ ५ & \end{array}$$

फल ३६ ॥ . . . . . मूल न जायते

$$\frac{0 \sim \sim +}{\sim \sim \sim} + \frac{11 \sim \sim \sim}{\sim \sim \sim} + \frac{22 \sim \sim}{\sim \sim \sim} = ५८$$

(c) Interpreted

(i) Continued from the obverse

$$(a) x^1 = \frac{19 \text{ dro}^* + 2a^* + 0 \text{ pra}^* + 2ku^*}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})} = 10$$

$$(b) x^1 (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2}) = 19 \text{ dro}^* + 2a^* + 0 \text{ pra}^* + 2ku^* < \text{whence } x^1 = 10 >$$

(ii) *Example* The capital of a certain banker is sixty One half of it goes in loss and then he gains by one third next he loses one fourth of it and finally gains one fifth so that he has two gains What is his gain and what is his loss and what the remainder and let that be stated

$$\text{Solution } 60 (1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5}) = 36$$

$$\text{Proofs } (a) x^1 = \frac{36}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1+\frac{1}{5})},$$

whence  $x^1 = 60$ .



... सार्धं त्रयोदशभिः किमिति 

१	४	२७
१	१	२

 फ. ५४ एत.

. एकेन सप्त चत्वारिष्वपह्नि संपद्यते कथं 

१	...	४
१	...	...

. . एको लभति चत्वारि शतं पर्यन्तं तु किं भवेत् . . . . .

(c) Interpreted.

This contains portions of a solution that is not at present, fully understood. The preliminary work is missing and then comes the following proportion  $40 : 160 :: 13\frac{1}{2} : 54$ , or cancelling by 40 we get  $1 : 4 :: \frac{27}{2} : 54$  The next part is missing but apparently was—

$$1 \cdot 4 :: 6 \cdot 24$$

$$1 \cdot 4 :: 3 \cdot 12$$

$$1 : 4 :: \frac{9}{2} : 18$$

# Folio 47 recto

(a) Transliterated from ancient Śāradā into Devanagari

. . . . . अ . . . . . र . . . . .									
निवक्ष्य. चमूस्तु पृतनास्तिस्रस्तिस्रश्चमू									
नीकीनिद्रशगुणामादुरक्षोहनीबुधः ॥ अक्षोहि									
र १	ए	३	३	३	३	३	३	१०	गु गुणितजा
ग १	प	१	१	१	१	१	१	१	
न ५	प								
तु ३	ति								
दा ॥ कश्चिद्राज		भी	रथ	२१८७०	एष अक्षोहि				
			गज	२१८७०	प्रमाण ॥ ॥				
			नर	१०९३५०	कुमारशब्दम ।				
			हय	६५६१०	. . . . .ि . . १ . .				

(१) (b) Rearranged

विचक्षणः

चमूस्तु पृतनारित्तस्तित्तश्च  
अनीकीनि दशगुणं आदुरक्षोहनीबुध ॥  
अक्षोहि

र० १	एष	३	३	३	३	३	३	१० गु०
ग० १	पति	१	१	१	१	१	१	१

गुणितजा	रथ	२१८७०
	गज	२१८७०
	नर	१०९३५०
	हय	६५६१०

(२१८७००)

ए१ अशोहिणी-प्रमाणं ॥

(२) उदा<sup>२</sup> ॥ कश्चिद् राजकुमार उच्यते ।

(c) Interpreted

Apparently 3 *chamūs* = 1 *pritarū*

3 *pritarū* = 1 *anikini*

10 *anikinis* = 1 *akṣauhini*.

The statement means a *patti* consists of 1 *ratha* + 1 *gaja* + 5 *nara* + 3 *turaga* (i. e., 1 chariot + 1 elephant + 5 foot soldiers + 3 horsemen) and that an *akṣauhini* contains  $3^7.10$  of each of these

$3^7.10$  1 chariots = 21,870 chariots

$3^7.10$  1 elephants = 21,870 elephants

$3^7.10.5$  footmen = 109,350 footmen

$3^7.10$  3 horsemen = 65,610 horsemen

Total 218,700



## उपोद्धात

यद्यपि यह मान लिया गया है कि प्रत्येक विद्यार्थी के सर्वांगीण विकास के लिए शिक्षा का माध्यम मातृभाषा होना चाहिए, फिर भी वास्तव में इस देश में मातृ भाषाओं की सर्वथा उपेक्षा होती रही। इसलिए न तो उनमें आधुनिक वैज्ञानिक विषयों पर ग्रन्थ लिखे गये और न पारिभाषिक शब्द ही थे जिनके आधार पर कोई ग्रन्थ लिखे जाते। ऐसी अवस्था में कार्य के दुस्तर होते हुए भी, हिन्दी को उच्चशिक्षा का माध्यम बनाने के स्तुत्य प्रयास में सहयोग देने की आन्तरिक प्रेरणा के कारण, मैंने हिन्दी में बीजगणित लिखना स्वीकार किया और माध्यमिक परीक्षा के लिए जितने भी उपलब्ध ग्रन्थ थे उनका चयन कर ऐसी सामग्री संकलित की जो सर्वग्राह्य हो सके। पुस्तक की रूपरेखा, उसकी सामग्री और विषय की समुचित अभिव्यक्ति पर पर्याप्त समय व्यतीत करने के उपरान्त मैंने इस पुस्तक को लिखना प्रारंभ किया। इसे सरल और सुपाठ्य बनाने का भरसक प्रयत्न किया गया है। रिभाषण सम्पूर्ण विचार को व्यक्त करनेवाली, संक्षिप्त और शीघ्रग्राह्य बनाई गई है। विषय को सरल बनाने के लिए प्रत्येक अध्याय में उदाहरण दिए गए हैं। उच्च गणित में

श्रेष्ठियों के अभिसार और अपसार का विषय महत्वपूर्ण होता है। इस का समीक्षा प्रस्तुत पुस्तक के क्षेत्र के परे है फिर भी इस का उल्लेख इस प्रकार किया गया है जिससे कि विद्यार्थियों को समझ में सरलता से आ सके। श्रेष्ठियों का अनन्ती तक योग दिन दशाशौ में किया जा सकता है यह गुणोत्तर श्रेष्ठों के द्वारा हिन्दू प्रमेय के अध्याय में उदाहरणों सहित समझाया गया है।

अपने पूज्य गुरु तथा महाकोशल महाविद्यालय के अनुभवी प्राध्यापक श्री बी. आ. शास्त्री का मैं छतब्र हूँ। उन्होंने अपना बहुत समय लगाकर इस पुस्तक में उचित संशोधन करने की तथा बहुमूल्य सुझाव देने की कृपा की है।

इस पुस्तक में प्रयुक्त समस्त पारिभाषिक शब्द प्रसिद्ध भाषाशास्त्री, आचार्य डॉ. रघुवीर ने प्रदान किए हैं। यह उनकी सतत सहायता और प्रोत्साहन का ही परिणाम है कि योजगणित को हिन्दो में प्रस्तुत करने का यह उत्तर कार्य पूरा हो सका। मैं क्या, सारा देश ही आंगल-भारतीय-महाकोश के लिए उनका ऋणी है।

साथ ही मैं श्री विजयेन्द्र कुमार माथुर एम्.ए. मरहवती-विहार का भी अनुगृहीत हूँ जिन्होंने भाषा को सुगोच तथा परिष्कृत बनाने में मेरी विशेष सहायता की है।

श्री. पी. के. पराडकर एम्. एस्. सी का भी मैं अनुगृहीत हूँ जिन्होंने विभिन्न परीक्षाओं के प्रश्नपत्रों से अनेक प्रश्न एकत्र कर इस पुस्तक की प्रस्तावितियों के निर्माण में मुझे विशेष सहायता प्रदान की है।

मराठी में इस पुराणक का सुन्दर अनुवाद कुमारी  
अहिल्या दाते बी.ए.(ऑनर्स) ने किया है। इस सत्प्रयास के  
लिए मैं उन्हें भी धन्यवाद देता हूँ।

अयोध्या प्रसाद श्रीवास्तव

## विषय-सूची

	पृष्ठ
Foreward, by Lt Col K L Dubey	1-10
Introduction, by Dr Raghu Vira	11-34
उपोद्घात—श्री अयोध्याप्रसाद श्रीवास्तव	35 37
<b>बीजगणित</b>	
<b>अध्याय</b>	
१ पदसंहतियों का वर्गीकरण, चल और अचल राशियां, परिमेय पूर्णांक त्रिजीय ध्रुत, समानघात ध्रुत, संमितीय ध्रुत, समीकार, ऐकात्म्य तिर्यग् गुणन का नियम, प्रश्नावलि १.	३-९
२ घातांक नियम क <sup>n</sup> की परिभाषा, घातांक नियम, घन और ऋण राशियों के घात, क <sup>n</sup> का अर्थ, प्रश्नावलि २.	१० २३
३ करणी और संकर राशियां मूल की परिभाषा, मूलों का प्रहसन, वरणी की परिभाषा, परिमेयकरण, धारूपनिक और संकर राशियां, अनुबद्ध संकर राशियां, मापांक की परिभाषा, प्रश्नावलि ३	२४ ३९

४ समान्तर श्रेढी

श्रेढी की परिभाषा, समान्तर श्रेढी, प्रचय, सामान्य पद, श्रेढी के स पदों का योग, समान्तर मध्यक, समान्तर श्रेढी के कुछ विशेष गुण, प्रश्नावलि ४.

४०-५६

५ गुणोत्तर श्रेढी

गुणोत्तर श्रेढी की परिभाषा, साधारण निष्पत्ति, सामान्य पद, स पदों का योग गुणोत्तर मध्यक, प्रश्नावलि ५, समान्तर गुणोत्तर श्रेढी और उसके स पदों का योग, अनन्त श्रेढी, अनन्त गुणोत्तर श्रेढी का योग, योग के लिए आवश्यक प्रतिबंध, समान्तर गुणोत्तर श्रेढी का अनन्ती तक योग, आवर्त दशमेक, आवर्त दशमिक की गुणोत्तर श्रेढी की सहायता से अहाँ, प्रश्नावलि ६.

५७-८४

६ हरात्मक श्रेढी

परिभाषा, हरात्मक श्रेढी और समान्तर श्रेढी में सम्बन्ध, हरात्मक मध्यक, दो धन राशियों के बीच के समान्तर, गुणोत्तर, और हरात्मक मध्यकों में सम्बन्ध, प्रश्नावलि ७, प्राकृतिक संख्याएँ, प्रथम प्राकृतिक संख्याओं का योग, प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग,

प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग, य-संकेतना, प्रश्नावलि ८.

८५-१०६

७ द्विघात समीकार

द्विघात समीकार का साधन, द्विघात समीकार के मूल, द्विघात समीकार के दो हो अधिक मूल नहीं रहते, मूलों के वास्तविक, समान और संकर रहने के लिए प्रतिबंध, विवेचक, मूलों का योग, मूलों का गुणनफल, मूल दिए जाने पर समीकार घनाना, एक के घनमूल, एक के घनमूलों का योग शून्य के सम होता है, संकर घनमूलों में सम्बन्ध, प्रश्नावलि ९, त्रिपद संहति की अर्धा में परिवर्तन, त्रिपद संहति के चिह्न में परिवर्तन, प्रश्नावलि १०.

१०७-१४१

८ समीकार

एक अज्ञात वाले समीकार, घात समीकार, व्युत्क्रम समीकार, प्रश्नावलि ११, दो अज्ञात वाले युगपत समीकार, समानघात समीकार संमितीय समीकार, प्रश्नावलि १२, तीन अज्ञात वाले समीकार, प्रश्नावलि १३.

१४२-१८४

९ क्रमचय और संचय

क्रमचय और संचय की परिभाषाएं,

स असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक चार न वस्तुएं लेने से बनने वाले क्रमचयों की और संचयों की संख्या, हत संकेतना, 10 का निर्वचन, संपूरक संचय, चयन की महत्तम अर्हा के लिए न की अर्हा, सजातीय और विजातीय वस्तुओं की परिभाषा, सजातीयता का ध्यान रखकर क्रमचयों की संख्या निकालना, क्रमचय और संचय के कठिन प्रश्न, प्रश्नावलि १४.

१८५-२१७

- १० गणितीय अनुमान  
गणितीय अनुमान से प्रमेय सिद्ध करने की रीति, प्रश्नावलि १५.

२१८-२२३

- ११ द्विपद प्रमेय (घन पूर्णांक घात)  
स द्विपदों का गुणनफल,  $(y+k)^n$  का विस्तार,  $(y+k)^n$  समान सर्वघात के द्विपदों का  $(1+y)^n$  के रूप में परिवर्तन, प्रश्नावलि १६,  $(y+k)^n$  के विस्तार में किसी भी पद को निकालना, द्विपद प्रमेय की सहायता से त्रिपद का विस्तार,  $(1+y)^n$  के विस्तार में महत्तम पद निकालना,  $(1+y)^n$  के विस्तार में महत्तम गुणक निकालना, द्विपद प्रमेय की उपपत्ति, युग्म पदों में के गुणकों का योग

अयुग्म पदों में के गुणकों के योग के सम होता है। छिपद गुणकों से सम्यक् कुल प्रदान, प्रदत्तावलि १७.

२२५-२५९.

१२ द्विपद प्रमेय (कोई भी घात)

$(1+y)^n$  का स की सय अर्धों के लिए विस्तार, आवश्यक प्रतिबंध, अभिसारी और अपसारी श्रेणियाँ,  $(1-y)^{-n}$  के विस्तार में सामान्य पद,  $(1+y)^n$  के विस्तार में संख्या की दृष्टि से महत्तम पद, छिपद प्रमेय का प्रयोग, प्रदत्तावलि १८.

२६०-२९१

१३ छेदा

परिभाषा, प्रतिच्छेदा, छेदा प्रमेय, छेदाओं की उपयुक्तता, स्वाभाविक छेदाएँ, घा राशि, लक्षण और दशमिकांश, सामान्य पद्धति, अवलोकन से लक्षण का निश्चय, दशमिकांश सदैव धन रहता जाता है, छेदा सारणी, छेदा सारणी का उपयोग, प्रतिछेदा सारणी, दत्त आधार पर छेदा घात होने पर किसी भी आधार पर छेदा का परिगणन, भाषांश, प्रदत्तावलि १९.

२९२-३१२

१४ घातांक और छेदा श्रेणियाँ

$k^x$  का विस्तार, घा के लिये श्रेणी, सी  $\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = \text{घा, छेदा } (1+y)$   
 $s \rightarrow \infty$



	का विस्तार, छेदाओं का परिगणन, घा राशि की असंमेल्यता, प्रश्नावलि २०.	३१३-३३४
१५	निश्चायक समानघात रेखीय समीकारों के निरसन फल, निरसन फलों को निश्चायक के रूप में व्यक्त करना, निश्चायक का वर्ण, संघटक, स्तम्भ, पंक्ति, अग्र संघटक, अग्र विकर्ण, निश्चायक का विस्तार, निश्चायकों के गुण, उपनिश्चायक, सहगुणक, दोनों में सम्यन्ध, प्रश्नावलि २१.	३३५-३५२
	उत्तरमाला	३५३-३८०
	पारिभाषिक शब्द	३८१-३९३
	छेदा-सारणी	३९६-३९७
	प्रतिछेदा-सारणी	३९८-३९९
	शुद्धिपत्र	४०१-४०२

बीजगणित

## पहला अध्याय

१.१ पदसंहतियों (expressions) का वर्गीकरण (classification) उनके पदों की संख्यानुसार किया जाता है। यदि उनमें पदों की संख्या एक, दो, तीन, या अनेक हो तो उन्हें क्रमशः एकपद (monomial), द्विपद (binomial), त्रिपद (trinomial) अथवा बहुपद (polynomial) संहतियाँ कहते हैं।

कय, कय + ख, कय + खर + ग, .....

कय<sup>स</sup> + खय<sup>स-१</sup> + गय<sup>स-२</sup> + ..... + पय + फ, क्रमशः एकपद, द्विपद, त्रिपद तथा बहुपद संहतियों के उदाहरण हैं।

१.२ चल तथा अचल राशियाँ (variable and constant quantities)—

उदाहरण—क मूलधन का, भिन्न भिन्न अवधियों के लिए ख प्रतिशत, प्रतिवर्ष व्याज से, मिश्रधन निकालो।

यदि य से मिश्रधन का अभिव्यक्ति किया जाय तो य की अर्थात् (values) ये होंगी—

$$य = क + \frac{ख \times क}{१००} \text{ प्रथम वर्ष के अन्त में}$$

$y = k + \frac{2x \times k}{100}$  द्वितीय वर्ष के अन्त में

$y = k + \frac{3x \times k}{100}$  तृतीय वर्ष के अन्त में

. . . . .

$y = k + \frac{14x \times k}{100}$  चौदहवें वर्ष के अन्त में

उपर्युक्त उदाहरण से यह ज्ञात होता है कि  $y$  की अर्हापें भिन्न भिन्न अवधियों के लिए भिन्न भिन्न हैं, किन्तु  $k$  तथा  $x$  की अर्हापें आदि से अन्त तक वही हैं। अतएव  $y$  को चल राशि तथा  $k$ ,  $x$  को अचल राशियाँ कहते हैं।

१.२१  $y$  एक चल राशि है,  $x$  दूसरी। यदि  $y$  और  $x$  में इस प्रकार का सम्बन्ध हो कि  $y$  की अर्हा दी जाने पर  $x$  की अर्हा ज्ञात हो जाय तो  $x$  को  $y$  का श्रित (function) कहते हैं।

जैसे  $x = 3y + 5$  में यदि  $y$  की अर्हा ज्ञात हो तो  $x$  की अर्हा निश्चित हो जाती है। साथ ही  $x = 3y + 5$  में  $y$  कोई भी अर्हा ले सकता है। अतएव  $y$  को स्वतन्त्र (independent) तथा  $x$  को परतन्त्र (dependent) चल राशि कहते हैं।

संक्षेपार्थ  $y$  के श्रित का प्रतिनिधान धि( $y$ ), श्री( $y$ ), था( $y$ ) . . . आदि से करते हैं।

१.३  $y$  का परिमेय (rational) पूर्णांक (integral) बीजीय श्रित (algebraic function)—

$k_0 y^m + k_1 y^{m-1} + k_2 y^{m-2} + \dots + k_{m-1} y + k_m$  इस रूप की पदसंहति, जिसमें  $k$  घन पूर्णांक है,  $y$  के परिमेय पूर्णांक अंश का उदाहरण है। परिमेय पूर्णांक अंश की इस परिभाषा में केवल  $y$  की ओर संकेत है।  $k_0, k_1, \dots, k_m$  इन अनेक गुणकों (coefficients) के अपरिमेय (irrational) तथा भिन्नीय (fractional) रहते हुए भी यह पदसंहति  $y$  का परिमेय पूर्णांक अंश है।\*

१.४ जिन बीजीय अंशों (algebraic functions) में, चल राशि का उच्चतम घात एक या दो हो, उन्हें क्रमशः  $y$  का एकघात तथा द्विघात अंश कहते हैं।  $k_0 y + k_1$ ,  $k_0 y^2 + k_1 y + k_2$ , क्रमशः एकघात तथा द्विघात बीजीय अंश के उदाहरण हैं। जिन पदसंहतियों में चल राशि का उच्चतम घात तीन, चार तथा स हो उन्हें क्रमशः त्रिघात, चतुर्घात, ..... तथा स-घात अंश कहते हैं। अनुच्छेद १.३ में दी गई पदसंहति में चल राशि का उच्चतम घात स होने के कारण यह  $y$  का स-घात अंश है। एकघात तथा द्विघात अंश कभी कभी क्रमशः रेखीय (linear) तथा वर्गीय (quadratic) अंश कहलाते हैं।

इसी प्रकार  $y$  तथा  $x$  इन दो चल राशियों के एकघात तथा द्विघात अंश के  $k_0 y + k_1 x + k_2$ ,  $k_0 y^2 + k_1 xy + k_2 x^2 + k_3 y + k_4 x + k_5$  उदाहरण हैं।

१.५ समानघात अंश (homogeneous function)—यदि  $y$  और  $x$  के परिमेय पूर्णांक अंश में, प्रत्येक पद का

---

\* Burnside and Panton—Vol I

घात एक ही हो तो यह ध्रित य, र का समानघात ध्रित कहलाता है। उदाहरणार्थ  $कय + खर$ ,  $कय^2 + खर^2 + गयर$ , जिनमें क, ख, ग अचल राशियां हैं य तथा र के क्रमशः एक तथा दो घात के समानघात ध्रित हैं।

संमितीय ध्रित (symmetrical function)—यदि दो राशियों के व्यतिहरण से परिमेय पूर्णांक ध्रित में परिवर्तन न हो तो यह उन चल राशियों का संमितीय ध्रित कहलाता है।

यदि ध्रित में दो से अधिक चल राशियां हों तो उनके प्रत्येक युग्म द्वारा उपर्युक्त प्रतिबन्ध का पालन करने पर ही यह ध्रित उन चल राशियों का संमितीय ध्रित होगा, अन्यथा नहीं।

उदाहरणार्थ

$$कय^2 + खय^2र + गय^2र^2 + खयर^2 + कर^2$$

$$क + र(य^2 + र^2 + ल^2) + ग(यर + रल + लय)$$

संमितीय ध्रित हैं, पहला य और र का, दूसरा य, र और ल का।

१.६ समीकार (equations)—किन्नी अव्यक्त की दो पदसंहतियों के समीकरण से समीकार प्राप्त होता है। समीकार में चल तथा अचल राशियां रहती हैं। अव्यक्त (unknown) राशि का उच्चतम घात ही समीकार का घात होता है।

अव्यक्त की जिस अर्था से समीकार का समाधान होता है उसे उक्त समीकार का मूल (root) कहते हैं। यदि अव्यक्त

की सब अर्थाओं से समीकार का समाधान होता हो तो समीकार को ऐकात्म्य (identity) कहते हैं।

उदाहरणार्थ 
$$\frac{y}{y-k} + \frac{y}{y-x} + \frac{y}{y-g} = \frac{k}{y-k} + \frac{x}{y-x} + \frac{g}{y-g} + 3$$

अव्यक्त  $y$  की सब अर्थाओं के लिए सत्य है।

यदि अव्यक्त की केवल विशेष अर्थाओं से ही समीकार का समाधान होता हो तो समीकार को प्रतिबन्धी समीकार (conditional equation) कहते हैं।

उदाहरणार्थ  $y^2 - 5y + 6 = 0$  यह समीकार केवल  $y=2$  तथा  $3$  के लिये ही सत्य है।

यदि प्रसंग से ऐकात्म्य की ओर अभ्युद्देश (reference) न हो तो साधारणतया समीकार से प्रतिबन्धी समीकार का बोध होता है।

यदि समीकार से ऐकात्म्य का बोध कराना हो तो समता का चिह्न  $\equiv$  इस प्रकार लिखा जाता है।

१७ तिर्यग् गुणन का नियम (rule of cross multiplication)—मान लो निम्न समीकारों का साधन करना है।

$$k_1 y + x_1 r + g_1 = 0 \quad \dots (1)$$

$$k_2 y + x_2 r + g_2 = 0 \quad \dots (2)$$

प्रथम समीकार को  $x_2$  तथा द्वितीय समीकार को  $x_1$  से गुणन करने के पश्चात्, द्वितीय समीकार को प्रथम में से घटाओ।

$$\therefore y (k_1 x_2 - x_1 k_2) + x_2 g_1 - x_1 g_2 = 0$$

$$\text{अतः } y = \frac{x_1 g_2 - x_2 g_1}{k_1 x_2 - x_1 k_2} \quad \dots \dots \dots (3)$$

प्रथम समीकार में  $y$  की इस अर्था का आदेश (substitution) करने से

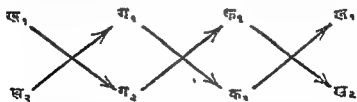
$$r = \frac{g_1 k_2 - k_1 g_2}{k_1 x_2 - x_1 k_2} \quad \dots \dots \dots (4)$$

(3) तथा (4) को निम्न प्रकार से एक साथ लिखा जा सकता है।

$$\frac{y}{x_1 g_2 - x_2 g_1} = \frac{r}{g_1 k_2 - k_1 g_2} = \frac{1}{k_1 x_2 - x_1 k_2} \quad (5)$$

(5) में  $y$ ,  $r$  तथा  $1$  के हरों के रूप देखने से यह प्रतीत होता है कि यदि (1) तथा (2) प्रकार के समीकारों का साधन करना हो तो  $y$ ,  $r$  की अर्थाएं निम्न नियमानुसार सरलता से प्राप्त होती हैं।

दोनों समीकारों में से  $y$ ,  $r$  के गुणकों को तथा अचल पदों को,  $r$  के गुणक से आरम्भ कर इस प्रकार लिखो।



शरों द्वारा निर्दिष्ट रीति के अनुसार गुणको को युग्मों में तिर्यग् रूप से गुणा करो। यदि शर अधोमुख हो तो धन



चिह्न और यदि ऊर्ध्वमुख हो तो ऋण चिह्न रखो।

इस प्रकार ये तीन पदसंहतियां ख, ग<sub>२</sub> - ग, ख<sub>२</sub>,  
ग, क<sub>२</sub> - क, ग<sub>२</sub>, क, ख<sub>२</sub> - ख, क<sub>२</sub> प्राप्त होती हैं जो क्रमशः  
य, र तथा १ की अनुपाती हैं।

अतः

$$\frac{य}{ख, ग_2 - ग, ख_2} = \frac{र}{ग, क_2 - क, ग_2} = \frac{१}{क, ख_2 - ख, क_2}$$

## प्रश्नावलि १

इन समीकारों का साधन करो—

(१)  $३य - २र - १ = ०$

$५य - ३र - ३ = ०$

(२)  $य + र - १५ = ०$

$४य + ३र - ५२ = ०$

(३)  $२य - ४र + ७ = ०$

$४य + ६र - २१ = ०$

(४)  $३य + ६र - १० = ०$

$२य - र + ५ = ०$

## दूसरा अध्याय

### घातांक नियम (laws of indices)

२.१ यदि स धन पूर्णांक हो तो  $k^s$   $k$  के सम  $s$  खण्डों के गुणनफल का प्रतिनिधान करता है।

अर्थात्

$$k^s = k \times k \times k \times \dots \text{ स खण्डों तक}$$

$k^s$  की इस परिभाषा में 'क' को आधार (base) तथा  $s$  को आधार  $k$  का घात कहते हैं।

उपर्युक्त परिभाषा के आधार पर निम्न नियमों का प्रतिपादन किया गया है। इन्हें घातांक नियम कहते हैं। जब तक अन्यथा न कहा जाय घात  $s$  की अर्हा सदैव धन पूर्णांक ली जायगी।

२.२ घातांक नियम—

(१)  $k^y \times k^r = k^{y+r}$

(२)  $k^y \div k^r = k^{y-r}$ , यदि  $y > r$

$= \frac{1}{k^{r-y}}$  यदि  $y < r$

(३)  $(k^y)^r = k^{yr}$

(४)  $(kx)^y = k^y \times x^y$

$$(4) \left( \frac{k}{x} \right)^y = \frac{k^y}{x^y}$$

य तथा र की धन पूर्णांक अर्हीमों के लिए घातांक नियमों की उपपत्ति (proof) अगले अनुच्छेद में दी गई है।

२३ (१) य तथा र के धन पूर्णांक होने पर  
 $k^y \times k^r = k^{y+r}$  का उपपादन करना।

अब  $k^y = k \times k \times k \times \dots$  य खण्डों तक (परिभाषा-नुसार)

तथा  $k^r = k \times k \times k \times \dots$  र खण्डों तक

$$\begin{aligned} \therefore k^y \times k^r &= (k \times k \times k \times \dots \text{य खण्डों तक}) (k \times k \times k \times \dots \text{र खण्डों तक}) \\ &= k \times k \times k \times \dots (y+r) \text{ खण्डों तक} \\ &= k^{y+r} \quad (\text{परिभाषानुसार}) \end{aligned}$$

उपप्रेमेय (corollary)—इस फल का निम्न विस्तार किया जा सकता है।

यदि ल भी धन पूर्णांक हो तो

$$\begin{aligned} k^y \times k^r \times k^l &= k^{y+r} \times k^l \\ &= k^{y+r+l} \end{aligned}$$

सामान्यतः

$$k^y \times k^r \times k^l \times k^v \times \dots = k^{y+r+l+v+\dots}$$

जिसमें य, र, ल, व, .. सब धन पूर्णांक हैं।

(२) य तथा र के धन पूर्णांक होने पर

$$\begin{aligned} k^y - k^r &= k^{y-r} \quad \text{यदि } y > r \\ &= \frac{1}{k^{r-y}} \quad \text{यदि } y < r \end{aligned}$$

उपपादन (prove) करना।

(अ) मान लो  $y > r$

$$k^y \div k^r = \frac{k^y}{k^r}$$

$$= \frac{k \times k \times k \times \dots y \text{ खण्डों तक}}{k \times k \times k \times \dots r \text{ खण्डों तक}}$$

(परिभाषानुसार)

$$= k \times k \times k \times \dots (y-r) \text{ खण्डों तक (अंश तथा हर के उभय-साधारण र खण्डों का लोप करने से)}$$

$$= k^{y-r} \quad (\text{परिभाषानुसार})$$

(आ) मान लो  $y < r$

$$k^y \div k^r = \frac{k \times k \times \dots y \text{ खण्डों तक}}{k \times k \times \dots r \text{ खण्डों तक}}$$

$$= \frac{1}{k \times k \times \dots (r-y) \text{ खण्डों तक}}$$

(अंश तथा हर के उभय-साधारण य खण्डों का लोप करने से)

$$= \frac{1}{k^{r-y}} \quad (\text{परिभाषानुसार})$$

(इ) य तथा र के घन पूर्णांक होने पर

$(k^y)^r = k^{yr}$  इसका उपपादन करना ।

$$(k^y)^r = (k^y \times k^y \times k^y \dots r \text{ खण्डों तक})$$

$$= (k \times k \times \dots y \text{ खण्डों तक}) (k \times k \times \dots y \text{ खण्डों तक}) \times$$

(क × क × ... य खण्डों तक) × ... ऐसे र अभिवारों  
(brackets) तक = क × क × क ... (य × र) खण्डों तक  
= क<sup>र</sup> (परिभाषानुसार)

उपप्रेम्य— (क<sup>य</sup>)<sup>र</sup> = (क<sup>र</sup>)<sup>य</sup> = क<sup>र</sup>

(४) य के घन पूर्णांक होने पर

(कख)<sup>य</sup> = क<sup>य</sup> × ख<sup>य</sup> इसका उपपादन करना।

(कख)<sup>य</sup> = (क × ख) (क × ख) ... य खण्डों तक  
= (क × क × ... य खण्डों तक) (ख × ख × ... य  
खण्डों तक)

= क<sup>य</sup> × ख<sup>य</sup> (परिभाषानुसार)

उपप्रेम्य— (कखग)<sup>य</sup> = क<sup>य</sup> × ख<sup>य</sup> × ग<sup>य</sup> तथा

सामान्यतः (क × ख × ग × घ × .....)<sup>य</sup>

= क<sup>य</sup> × ख<sup>य</sup> × ग<sup>य</sup> × घ<sup>य</sup> × .....

अतः अनेक राशियों के गुणनफल का य<sup>वा</sup> घात य घाती  
उन राशियों के गुणनफल के सम होता है।

(५) य के घन पूर्णांक होते हुए

$\left(\frac{\text{क}}{\text{ख}}\right)^{\text{य}} = \frac{\text{क}^{\text{य}}}{\text{ख}^{\text{य}}}$  इसका उपपादन

$\left(\frac{\text{क}}{\text{ख}}\right)^{\text{य}} = \left(\frac{\text{क}}{\text{ख}}\right) \left(\frac{\text{क}}{\text{ख}}\right) \dots \dots \dots \text{य खण्डों तक}$

=  $\frac{\text{क} \times \text{क} \times \dots \text{य खण्डों तक}}{\text{ख} \times \text{ख} \times \dots \text{य खण्डों तक}}$

=  $\frac{\text{क}^{\text{य}}}{\text{ख}^{\text{य}}}$  (परिभाषानुसार)

यह नियम इस प्रकार लिखा जा सकता है—दो राशियों  
की लब्धि का य<sup>वा</sup> घात इन राशियों के य<sup>वै</sup> घात की लब्धि  
है।

निम्न फल का सत्यापन (verification) सरलता से किया जा सकता है

$$\left( \frac{k^m \times r^m \times \dots}{g^m \times \dots} \right)^n = \frac{k^{mn} \times r^{mn} \times \dots}{g^{mn} \times \dots}$$

२.४ धन तथा ऋण राशियों के घात—धन राशियों की संख्या कितनी ही हो उनका गुणनफल सदैव धन रहता है। यदि धन राशि का उभयपक्ष युग्म (even) या अयुग्म (odd) घात तक किया जाय तो उसकी अर्था सदैव धन रहती है। किन्तु ऋण राशियों का गुणनफल सण्डों की युग्म अथवा अयुग्म संख्या के अनुसार धन या ऋण रहता है, यह इन उदाहरणों से सात होगा—

$$(-y)^1 = (-y) \quad (-y) = y^1$$

$$(-y)^2 = (-y)^1 (-y) = y^1 (-y) = -y^2$$

$$(-y)^3 = (-y)^2 (-y)^1 = y^2 \times y^1 = y^3$$

अथवा सामान्यतः

$$(-y)^{2n} = \left[ (-y)^2 \right]^n = (y^2)^n = y^{2n}$$

$$(-y)^{2n+1} = (-y)^{2n} (-y) = -y^{2n} \times y = -y^{2n+1}$$

अतः उपर्युक्त आवेदन (statement) सत्य है।

२.५ धन पूर्णाकेतर घात—अनुच्छेद २.१ में दी गई क<sup>म</sup> की परिभाषा और तदनुसार उपपादित घातांक नियम स, य तथा र की केवल धन पूर्णांक अर्थात् के लिए ही सत्य हैं। स, य और र की ऋण तथा भिन्नीय (fractional) अर्थात् के लिए इस परिभाषा का कोई अर्थ नहीं।

जैसे  $३^४$  में, ४ का खण्डों की संख्या की ओर अभ्युद्देश है। अर्थात् ३ को ४ बार लेना चाहिए। किन्तु इसी परिभाषानुसार यदि यह कहा जाय कि  $५^{\frac{१}{३}}$  में ५ को  $\frac{१}{३}$  बार लिया गया है अथवा  $७^{-४}$  में ७ को  $(-४)$  बार लिया गया है तो यह आवेदन निरर्थक होगा।

अब य तथा र की सब अर्धांशों के लिए ऊपर प्रतिपादित घातांक नियमों की सत्यता मान कर अगले अनुच्छेदों में  $k^r$  का स की भिन्नीय तथा ऋण अर्धांशों के लिए अर्थ दिया जायगा।

२.६ र के घन पूर्णांक होते हुए  $k^r$  का अर्थ निकालना।

$$\begin{aligned} k^r &\times k^r \times k^r \times \dots \quad r \text{ खण्डों तक} \\ &= k^{r+r+r+\dots} \quad r \text{ पदों तक} \\ &= k^{r^2} \quad (\text{प्रथम नियमानुसार}) \\ &= k \end{aligned}$$

किन्तु वाम पक्ष  $(k^r)^r$  इस प्रकार लिखा जा सकता है। अर्थात्  $(k^r)^r = k$

अतः  $k^r$  के  $r^{\text{वें}}$  घात का फल  $k$  है।

अतः  $k^r$   $k$  के  $r^{\text{वें}}$  मूल का प्रतिनिधान करता है।

२.६१ स शून्य होने पर  $k^n$  का अर्थ निकालना ।

छितीय घातांक नियम—

$\frac{k^y}{k^x} = k^{y-x}$  य और  $x$  की मय अर्थात् के लिए

सत्य है ।

यदि  $x=y$  हो तो

$$\frac{k^y}{k^y} = k^{y-y} = k^0$$

अथवा  $1 = k^0$

$$k^0 = 1$$

अतः  $k$  की शून्य अर्था को छोड़ कर सब अर्थाओं के लिए  $k^0 = 1$ .

२.६२ स की घन पूर्णांक अर्था के लिए  $k^{-n}$  का अर्थ निकालना ।

$$\begin{aligned} k^n \times k^{-n} &= k^{n-n} && \text{(प्रथम नियमानुसार)} \\ &= k^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{अतः } k^{-n} = \frac{1}{k^n}$$

२.६३ प्रत्येक भिन्न दो पूर्णांकों का भागफल समझा जा सकता है, जिसमें हर को सदैव घन पूर्णांक ले सकते हैं ।

अथ  $y$  के घन पूर्णांक होने पर  $k^{\frac{y}{x}}$  का जिसमें भिन्न  $\frac{y}{x}$  चाहे घन हो अथवा ऋण, अर्थ निकालना है ।



प्रथम नियम के अनुसार

$$\begin{aligned} & k^{\frac{t}{y}} \times k^{\frac{t}{y}} \times k^{\frac{t}{y}} \times \dots \text{तक} \\ = & k^{\frac{t}{y} + \frac{t}{y} + \frac{t}{y} + \dots \text{तक}} \\ = & k^{\frac{t}{y} \times \frac{t}{y}} \\ = & k^{\frac{t}{y}} \end{aligned}$$

किन्तु चाम पक्ष  $(k^{\frac{t}{y}})^y$  इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\text{अतः } [k^{\frac{t}{y}}]^y = k^t$$

अर्थात्  $(k^{\frac{t}{y}})$  का  $y$ वा घात  $k^t$  है।

अतः  $k^{\frac{t}{y}}$ ,  $k^t$  का  $y$ वा मूल है

पुनः  $k^{\frac{t}{y}}$  को  $(k^{\frac{t}{y}})^{\frac{t}{y}}$  इस प्रकार लिखा जा सकता है क्योंकि तृतीय नियमानुसार

$$(k^{\frac{t}{y}})^{\frac{t}{y}} = k^{\frac{t}{y} \times \frac{t}{y}}$$

इसका यह अर्थ है कि  $k^{\frac{t}{y}}$  यह  $k^{\frac{t}{y}}$  का  $y$ वा घात है।

२.७ कुछ उदाहरण—

उदाहरण १— सरल करो—

$$(अ) 3^2 \times 3^3 \quad (आ) \frac{2^4}{2^2} \quad (इ) (3^2)^3$$

$$(ई) (3 \times 2)^4 \quad (उ) (\frac{3}{4})^5$$

$$(म) 3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$$

$$(आ) \frac{2^4}{2^8} = 2^{4-8} = 2^{-4}$$

$$(इ) (3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$$

$$(ई) (3 \times 2)^4 = 3^4 \times 2^4 = 81 \times 16 = 1296$$

$$(उ) \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1024}$$

उदाहरण २—घन घातांकों में व्यक्त करो—

$$(अ) 3^{-2} \times 3^{-4} \times 3^9 \quad (आ) \frac{8^{-4} \times 2^4 \times y^{-3}}{8^{-3} \times 2^2 \times y^2}$$

$$\begin{aligned} (अ) 3^{-2} \times 3^{-4} \times 3^9 &= 3^{-2-4+9} \\ &= 3^{-3} \\ &= \frac{1}{3^3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (आ) \frac{8^{-4} \times 2^4 \times y^{-3}}{8^{-3} \times 2^2 \times y^2} \\ &= \frac{2^{4-3}}{8^{-4+3} \times y^{2+3}} \\ &= \frac{2^1}{8^{-1} \times y^5} \\ &= \frac{2}{8 \times y^5} \end{aligned}$$

उदाहरण ३—सरल करो—

$$\left[ \frac{3y^3r^3l}{y^4 \times r^4} \right]^{-\frac{2}{3}} \times \left[ \frac{y^4 \times l^4}{r^3} \right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{3y^3 r^3 l}{y^3 \times r^4} \right]^{-\frac{2}{3}} \times \left[ \frac{y^4 \times l^4}{r^3} \right]^{-\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{3^{-\frac{2}{3}} \times y^{-2} \times r^{-3} l^{-\frac{2}{3}}}{y^{-1} \times r^{-\frac{1}{3}}} \times \frac{y^{-1} l^{-1}}{r^{-1}} \\
 &= \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times \frac{r^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1}}{y^{2+1-\frac{1}{3}} \times l^{1+\frac{2}{3}}} \\
 &= \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times \frac{r^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{4}{3}} \times l^{\frac{4}{3}}}
 \end{aligned}$$

उदाहरण ४— सरल करो—

$$\frac{1}{1 + क-र + क-ल} + \frac{1}{1 + क-ल + क-य} + \frac{1}{1 + क-ल + क-र}$$

$$\begin{aligned}
 \text{पदसंहति} &= \frac{क-य}{क-य + क-र + क-ल} + \frac{क-र}{क-र + क-ल + क-य} \\
 &+ \frac{क-ल}{क-ल + क-य + क-र} \\
 &= \frac{क-य + क-र + क-ल}{क-य + क-र + क-ल} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

उदाहरण ५—

$क^{\frac{2}{3}} + क^{\frac{2}{3}} ख^{\frac{2}{3}} + ख^{\frac{2}{3}}$  को  $क^{\frac{2}{3}} - ख^{\frac{2}{3}}$  से गुणा करो ।

$$\begin{array}{r}
 k^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \\
 k^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \\
 \hline
 k + k^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} \\
 - k^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - x \\
 \hline
 k \qquad \qquad \qquad -x
 \end{array}$$

अतः अपेक्षित गुणनफल  $(k-x)$  के सम है।

## प्रश्नावलि २

(१) धन घातांकों में व्यक्त करो—

(म)  $y^3 \times r^{-4}$       (भा)  $y^{-\frac{2}{3}}$       (इ)  $r^{-\frac{5}{3}}$

(ई)  $\frac{y^{\frac{5}{3}} \times r^{-\frac{2}{3}}}{y^{-\frac{2}{3}} \times r^{\frac{2}{3}}}$       (उ)  $y^{\frac{2}{3}} \times y^{-\frac{5}{3}}$

(ऊ)  $\frac{y^{-\frac{2}{3}} \times r^{-\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}} \times r^{\frac{2}{3}}}$

(२) इनकी अर्थापेक्षा निकालो—

(म)  $c^{\frac{2}{3}}$       (भा)  $27^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}}$       (इ)  $\frac{16^{\frac{2}{3}} \times 64^{-\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}$

(ई)  $\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(३) सरल करो—  $\frac{y^0 \times (r \times l)^2 (l^1)^2 [y^1 r^1 l]^2}{[y^0 \times r \times l^2]^2}$

(४)  $[3^2]^3$  अथवा  $3^{2 \times 3}$  में कौनसा बड़ा है ?

(५) सरल करो  $\frac{3^3}{8(3^2)^2}$

(६) (अ)  $y^3 + y^3 + 1$  को  $y^3 - 1$  से गुणा करो ।

(आ)  $y^2 + y^2$   $r^2 + r^2$  को  $y^2 - r^2$  से गुणा करो ।

(इ)  $(2y + 1 + 2y^{-1})$  को  $(2y - 1 + 2y^{-1})$  से गुणा करो ।

(७)  $y^2 - r^2$  का  $y^2 - r^2$  से भाजन करो ।

(८) ये पदसंहतियां सरल करो—

(क)  $\left[\frac{y^2}{r^2}\right]^3 \left[\frac{r^2}{l^2}\right]^4 \left[\frac{l^2}{y^2}\right]^5$

(ख)  $[y^2 + r^2] [r^2 - y^2]$

(ग)  $[y^2 \times r^2] \times [y^2 \times r^2] - y^2 r^2$

(घ)  $[y^2 \times r^2]^2 \times \left[\frac{r^2 l^2}{y^2}\right]^3 - y^2 \times l^2$

(ङ)  $(y_-)^{2+2} \times \left(\frac{y^2}{y^2}\right)^{2+2} \times \left(\frac{y^2}{y^2}\right)^{2+2}$

[कलकत्ता १९००]

$$(च) \left[ \frac{y^t}{y^y} \right] \div \left[ \frac{y^{t+y}}{y^{t-y}} \right]^{\frac{t}{y}} \quad [\text{फलक.ता १९०२}]$$

$$(छ) \left[ \frac{y^{\tau}}{y^{\tau}} \right]^{\tau} \times \left[ \frac{y^{\tau}}{y^{\tau}} \right]^{\tau} = \left[ (y^{\tau})^{\tau} (y^{\tau})^{\tau} \right] \times$$

$$\left[ (y^{\tau})^{\tau} (y^{\tau})^{\tau} \right] \quad [\text{फलक.ता १९०३}]$$

$$(ज) \left[ \frac{y^{\tau}}{y^{\tau}} \right]^{\tau^3 + \tau \times \tau + \tau^3} \times \left[ \frac{y^{\tau}}{y^{\tau}} \right]^{\tau^3 + \tau \times \tau + \tau^3} \times$$

$$\left[ \frac{y^{\tau}}{y^{\tau}} \right]^{\tau^3 + \tau \times \tau + \tau^3} \quad [\text{फलक.ता १९०४}]$$

(९) यदि  $r = y + y^{-1}$  हो तो

(क)  $y^3 + y^{-3}$  (ख)  $y^3 + y^{-3}$  (ग)  $y^4 + y^{-4}$   
इन्हें  $r$  के पदों में व्यक्त करो।

(१०) यदि  $k^3 + x^3 + g^3 = 0$  हो तो सिद्ध करो कि  
 $[k + x + g]^3 = 27 \times k \times x \times g$

(११) यह दिखाओ कि समीकार  $y^2 + r^2 + l^2 = 0$  परिवर्तन में [अर्थात् भिन्नीय घातांक न रहे इसलिये जितना बार आवश्यक हो उतनी बार पक्षान्तरण तथा वर्ग करने से]

$$[y^2 + r^2 + l^2 - 2rl - 2ly - 2yr]^2$$

$$= 12rl(y + r + l)$$

में परिवर्तित होता है।

(१२) यदि  $k^2 = x$ ,  $x^2 = g$  तथा  $g^2 = k$  तो सिद्ध करो

कि यरल = १

(१३) यदि  $k^x = 8$ ,  $k^y = 2$  तथा  $k^z = [8^x \times 2^y]^{\frac{1}{2}}$  तो सिद्ध करो कि यरल = १

(१४) यदि  $k^{m+n} = [k^m]^n$  तो  $m$  की अर्धा न के पदों में निकालो ।

## तीसरा अध्याय

### करणी और संकर राशियाँ

(surds and complex quantities)

३.१  $\sqrt[n]{x}$  के रूप के पद को, जिसमें  $x$  धन पूर्णांक है, मूल (radical) कहते हैं। मूल चिह्न (radical sign)  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  के नीचे की संख्या 'क' को आधार (base) तथा  $x$  को मूल का घातांक कहते हैं।

द्वितीय, तृतीय, ..... आदि घर्ण (order) के मूल क्रमशः द्विघात, त्रिघात, . . . आदि मूल कहलाते हैं।

३.२ मूलों का प्रहासन (reduction of radicals)—  
मूलगत राशि को उस राशि से, जिसका घात भिन्न है, व्यक्त कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ  $\sqrt[n]{x}$  तथा  $\sqrt[m]{x}$  एक ही राशि का प्रति-निधान करते हैं।

घातांक नियमों की सहायता से निम्न सम्यन्धों की उपपत्ति सरलता से की जा सकती है।

$$(1) (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[nm]{x^m}$$



$$(2) \quad (\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{k}}}) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{k}} = \sqrt[3]{k}$$

$$(3) \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{k}} = (\sqrt[3]{k})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{k}$$

$$(4) \quad \sqrt[3]{k} \times \sqrt[3]{k} = \sqrt[3]{k \times k} = \sqrt[3]{k^2} = \sqrt[3]{k} \times \sqrt[3]{k}$$

$$(5) \quad \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k}} = \sqrt[3]{\frac{k}{k}} = \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k}}$$

३.३ स के घन पूर्णांक होने पर  $\sqrt[3]{k}$  की अर्धा सदैव निदिधत की जा सकती है। किन्तु स के भिन्नीय होने पर इसकी अर्धा कुछ दशाओं में पूर्ण रूप से निदिधत नहीं की जा सकती। उदाहरणार्थ ४, ९, २.२५, ६.२५ के घर्गमूल क्रमशः २, ३, १.५, २.५ परिमेय राशियां हैं। किन्तु यदि २, ३, ५ के घर्गमूल और २५, ३१.... के घनमूल निकालने का प्रयत्न किया जाय, तो ऐसी संख्याएं जो इनके घर्गमूल तथा घनमूल का पूर्ण रूप से प्रतिनिधान करें प्राप्त नहीं होतीं।

अतः यदि क किसी भी संख्या का पूर्ण तथा घात न हो तो  $\sqrt[3]{k}$  को करणी तथा अपरिमेय राशि कहते हैं।

करणी का घर्ण (order) मूल का अभिधान करनेवाली संख्या से निदिधत किया जाता है। यथा  $\sqrt[3]{27}$ ,  $\sqrt[4]{256}$ ,...  $\sqrt[5]{k}$  क्रमशः त्रिघर्ण, चतुर्घर्ण.....तथा स<sup>वें</sup> घर्ण की करणियों क उदाहरण हैं।

३.३१ किन्हीं भी दो करणियों का समवर्ण करणियों में परिवर्तन हो सकता है।

उदाहरणार्थ—

$\sqrt[2]{क}$  तथा  $\sqrt[2]{ख}$  राशियां क्रमशः

$\sqrt[2]{क} \sqrt[2]{ख}$  तथा  $\sqrt[2]{ख} \sqrt[2]{क}$  में व्यक्त की जा सकती हैं।

इस विधान में करणियों की अर्धांश न निकालते हुए भी कौन सी करणी यही है यह निश्चित किया जा सकता है। पुनः इसी की सहायता से दो करणियों का गुणनफल तथा लघि भी निकाली जा सकती है।

उदाहरण १ — कौनसी यद्दी है  $\sqrt[3]{१७}$  अथवा  $\sqrt[3]{११}$  ?

दोनों राशियों का समवर्ण करणियों में परिवर्तन करने पर  $\sqrt[3]{१७} = \sqrt[3]{१७२}$

$$= \sqrt[3]{२८९}$$

$$\sqrt[3]{११} = \sqrt[3]{११३}$$

$$= \sqrt[3]{१३३१}$$

अतः इससे ज्ञात होता है कि दूसरी यद्दी है।

उदाहरण २—  $\sqrt[3]{७}$  को  $\sqrt[3]{५}$  से गुणा करो।

$$\begin{aligned}
 \sqrt{9} \times \sqrt[3]{4} &= \sqrt[3]{9^3} \times \sqrt[4]{4^2} \\
 &= \sqrt[3]{9^3 \times 4^2} \\
 &= \sqrt[12]{6480}
 \end{aligned}$$

उदाहरण ३—

$\sqrt[3]{2}$  का  $\sqrt{3}$  से भाजन करो।

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{2} - \sqrt{3} &= \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{27} \\
 &= \sqrt[4]{\frac{8}{27}}
 \end{aligned}$$

३.४ क के परिमेय राशि तथा  $\sqrt{x}$  के अपरिमेय राशि होने पर, वास्तविक राशि का सामान्यतम रूप  $k + \sqrt{x}$  लिया जायगा।

$k + \sqrt{x}$  तथा  $k - \sqrt{x}$  रूप की राशियाँ अनुगुह वर्ग करणियाँ (conjugate quadratic surds) कहलाती हैं।

दो अनुगुह वर्ग करणियों का योग तथा गुणनफल परिमेय होता है।

फर्योंकि योग  $(k + \sqrt{x}) + (k - \sqrt{x}) = 2k$  परिमेय है, तथा

गुणनफल  $(k + \sqrt{x})(k - \sqrt{x}) = k^2 - x$  परिमेय है।

गणित में यह रूढि है कि  $k + \sqrt{x}$  रूप की राशि अन्तिम फल क हर में नहीं रहनी चाहिए। हर को इन राशियों से मुक्त करने की विधा को हर का परिमेयकरण (rationalizing) कहते हैं। अब इन संख्याओं से सम्बद्ध

निम्न प्रमेयों का उपपादन किया जाता है ।

३५ प्रमेय १—

यदि  $k + \sqrt{x} = y + \sqrt{r}$  जिसमें  $k$  तथा  $y$  परिमेय और  $\sqrt{x}$  तथा  $\sqrt{r}$  अपरिमेय हों तो  $k=y$  और  $x=r$

यह दिया गया है कि  $k + \sqrt{x} = y + \sqrt{r}$

$$\therefore k - y + \sqrt{x} = \sqrt{r}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने से

$$(k - y)^2 + x + 2\sqrt{x}(k - y) = r$$

अथवा  $2\sqrt{x}(k - y) = r - x - (k - y)^2$  प्राप्त होता है।  
अब वाम पक्ष अपरिमेय तथा दक्षिण पक्ष परिमेय है। जब तक प्रत्येक पक्ष शून्य के सम नहीं होता यह असम्भव है।

अतः  $\sqrt{x}(k - y) = 0$  किन्तु  $\sqrt{x} \neq 0$  (क्योंकि  $\sqrt{x}$  अपरिमेय है)

$$\therefore k - y = 0$$

अर्थात्  $k = y$

और  $x = r$ । इससे प्रमेय का स्थापन होता है।

प्रमेय २—

यदि  $k, x, g$  और  $y$  परिमेय तथा  $k + \sqrt{x}$ , तथा  $g + \sqrt{y}$  इन दो वर्ग करणियों का योग तथा गुणनफल परिमेय हो तो  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$  तथा  $k = g$ । अथ इनका योग

अर्थात्  $(k + \sqrt{x}) + (g + \sqrt{y})$  परिमेय है।

$k + g + (\sqrt{x} + \sqrt{y})$  परिमेय है।

$k + g + (\sqrt{x} + \sqrt{y})$  में अपरिमेय भाग शून्य होने

पर ही यह संभव होगा ।

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$$

$$\text{अथवा } \sqrt{x} = -\sqrt{y}$$

पुनः गुणनफल  $(k + \sqrt{x})(g + \sqrt{y})$  परिमेय है  
अर्थात्  $kg + \sqrt{x} \times \sqrt{y} + \sqrt{x} \times g + \sqrt{y} \times k$  परिमेय है

अथवा  $kg - x + \sqrt{x}(g - k)$  परिमेय है

[ $\sqrt{y} = -\sqrt{x}$  रखने पर

$\sqrt{x}$  का गुणक शून्य के सम होने पर ही यह संभव है ।

$$\therefore g - k = 0$$

$$k = g$$

अतः यदि दो वर्ग करणियों का योग और गुणनफल परिमेय हो तो वे परस्पर अनुयुक्त होती हैं ।

उदाहरण १ —  $3 + \sqrt{2}$  का परिमेयकारक खण्ड निकालो ।

$3 + \sqrt{2}$  की अनुयुक्त वर्ग करणी  $3 - \sqrt{2}$  है

अतः अपेक्षित परिमेयकारक खण्ड  $3 - \sqrt{2}$  है ।

उदाहरण २ —  $1 - \sqrt[3]{2}$  का परिमेयकारक खण्ड निकालो ।

यदि  $(1 - y)(1 + y + y^2) = 1 - y^3$  इस ऐकात्म्य में  $y = \sqrt[3]{2}$  रखा जाय तो

$$(1 - \sqrt[3]{2})(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) = 1 - (\sqrt[3]{2})^3$$

$$= 1 - 2$$

$$= -1$$

वाम पक्ष के दो खण्डों का गुणनफल परिमेय है। अतः  $1 + {}^3\sqrt{2} + {}^3\sqrt{4}$  यह  $1 - {}^3\sqrt{2}$  का परिमेयकारक खण्ड है।

उदाहरण ३—  $\frac{4-2\sqrt{3}}{8+\sqrt{3}}$  को परिमेय हर के रूप में परिवर्तन कर के लिखो।

हर की अर्थात्  $8+\sqrt{3}$  की अनुवद्ध वर्गकरणी  $8-\sqrt{3}$  है। दत्त भिन्न के अंश तथा हर को  $8-\sqrt{3}$  से गुणा करने पर

$$\begin{aligned}\frac{(4-2\sqrt{3})(8-\sqrt{3})}{(8+\sqrt{3})(8-\sqrt{3})} &= \frac{20-6\sqrt{3}-4\sqrt{3}+6}{16-3} \\ &= \frac{26-10\sqrt{3}}{13} \\ &= 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

उदाहरण ४—

$\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$  को परिमेय हर के रूप में व्यक्त करो।

$\frac{1}{(2-\sqrt{2})+\sqrt{3}}$  का परिमेयकरण

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2-\sqrt{2})+\sqrt{3}} &= \frac{(2-\sqrt{2})-\sqrt{3}}{[(2-\sqrt{2})+\sqrt{3}][(2-\sqrt{2})-\sqrt{3}]} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(2-\sqrt{2})^2-3} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3-4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2 - \sqrt{2} - \sqrt{3})(3 + 4\sqrt{2})}{(3 - 4\sqrt{2})(3 + 4\sqrt{2})} \\
 &= \frac{(2 - \sqrt{2} - \sqrt{3})(3 + 4\sqrt{2})}{9 - 32} \\
 &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2)(3 + 4\sqrt{2})}{23}
 \end{aligned}$$

३.६ काल्पनिक तथा संकर राशियाँ (imaginary and complex quantities)—

अब काल्पनिक संख्याओं पर विचार किया जायगा।

$y^2 + 4 = 0$  इस समीकार का साधन करो।

$y^2 = -4$  इस समीकार का समाधान य की ऐसी अर्थाओं से, जिनका वर्ग  $-4$  है होता है। अभी तक विद्यार्थी केवल ऐसी संख्याओं से अभिज्ञ हैं जिनका वर्ग उनके धन अथवा शून्य रहते हुए भी धन रहता है। अतः यह संख्या जिसका वर्ग  $-4$  है इन संख्याओं से भिन्न होनी चाहिए।  $\sqrt{-4}$  जिसका वर्ग  $-4$  है काल्पनिक संख्या कहलाती है।

$\sqrt{-4}$  को  $\sqrt{4} \times \sqrt{-1}$  तथा  $2\sqrt{-1}$  इस प्रकार लिख सकते हैं। सामान्यतः  $\sqrt{-1}$  का श से अभिधान किया जाता है। अतः  $\sqrt{-4}$  को २श इस रूप में भी लिख सकते हैं।

३.६१ श के गुणों का अनुसन्धान—

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \quad \text{अर्थात् श} = \text{श}$$

$$(\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1 \quad \text{अर्थात् श}^2 = -1$$

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1} \text{ अर्थात् } \text{श}^3 = -\text{श}$$

$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 = 1 \text{ अर्थात् } \text{श}^4 = 1$$

$$[(\sqrt{-1})^{2\text{स}}] = [(\sqrt{-1})^2]^{\text{स}} = (-1)^{\text{स}}$$

=  $\pm 1$  स की युग्म अथवा अयुग्म अर्हानुसार

अर्थात्  $(\text{श})^{2\text{स}} = \pm 1$  स की युग्म अथवा अयुग्म अर्हानुसार

$$(\sqrt{-1})^{2\text{स}+1} = (\sqrt{-1})^{2\text{स}} (\sqrt{-1}) = \pm \text{श} \text{ स की युग्म अथवा अयुग्म अर्हानुसार}$$

यदि श किसी भी पूर्णांक घात तक उन्नत हो तो उसका प्रहसन उपर्युक्त रीति से किया जा सकता है।

३.६२ अब  $y^2 - ३y + ३ = ०$  इस समीकार का साधन करो।

य की अर्हाएँ जिनसे इस समीकार का समाधान होता है  $\frac{३ \pm \text{श} \sqrt{३}}{२}$  अथवा  $\frac{३}{२} \pm \text{श} \frac{\sqrt{३}}{२}$  हैं। यह स्पष्ट है कि ये

वास्तविक तथा काल्पनिक संख्याओं के योग तथा अन्तर हैं। इस प्रकार से संघटित राशियाँ संकर राशियाँ कहलाती हैं।

संकर राशि (complex quantity)—यदि क तथा ख वास्तविक हों तो क + शख संकर राशि कहलाती है। इसमें क को वास्तविक घटक (real part) तथा ख को काल्पनिक घटक (imaginary part) कहते हैं।



सामान्यतः किसी भी संख्या का अभिधान क+शख से किया जाता है। इसमें ख को शून्य के सम लने से वास्तविक संख्या तथा क को शून्य के सम लेने से काल्पनिक संख्या प्राप्त होती है। यदि  $क \neq 0$ ,  $ख \neq 0$  तो यह संकर राशि का प्रतिनिधान करती है।

३.६३ अनुवद्ध संकर राशियाँ— केवल काल्पनिक भागों के विपरीत चिह्न वाली राशियाँ अनुवद्ध संकर राशियाँ कहलाती हैं तथा प्रत्येक दूसरी की अनुवद्ध कहलाती है। ३+२श तथा ३-२श; य+शर तथा य-शर अनुवद्ध संकर राशियों के उदाहरण हैं।

३.७ दो संकर राशियों का योग, अन्तर, गुणनफल तथा भागफल संकर होता है।

मान लो क+शख, ग+शघ दो संकर राशियाँ हैं।

इनका योग तथा अन्तर

$$(क+शख) \pm (ग+शघ)$$

$$= (क \pm ग) + श (ख \pm घ) \text{ संकर है।}$$

इनका गुणनफल

$$(क+शख) (ग+शघ) = (कग-खघ) + श [कघ+खग] \text{ संकर है।}$$

इनका भागफल

$$\frac{क+शख}{ग+शघ} = \frac{(क+शख) (ग-शघ)}{(ग+शघ) (ग-शघ)}$$

[अंश तथा हर को (ग-शघ) से गुणा करने पर

$$\begin{aligned}
&= \frac{(क + शख) (ग - शघ)}{ग^2 - श^2 घ^2} \\
&= \frac{(क + शख) (ग - शघ)}{ग^2 + घ^2} \\
&= \frac{(कग + खघ) + श (खग - कघ)}{ग^2 + घ^2} \\
&= \frac{कग + खघ}{ग^2 + घ^2} + श \frac{खग - कघ}{ग^2 + घ^2} \text{ सकर है।}
\end{aligned}$$

३.८ साध्य १—

यदि संकर राशि शून्य के सम हो तो उसका वास्तविक घटक शून्य होता है तथा काल्पनिक घटक भी शून्य होता है।

मान लो  $क + शख = 0$

$$\therefore क = -शख$$

दोनों पक्षों का घर्ग करन से तथा  $श^2 = -१$  रखने से  
 $क^2 = -ख^2$  प्राप्त होता है।

$$\text{अर्थात् } क^2 + ख^2 = 0$$

अतः क तथा ख दोनों वास्तविक संख्याएं हैं अतः क<sup>२</sup> तथा ख<sup>२</sup> सदैव धन रहेंगे।

दो वास्तविक संख्याओं के घर्ग का योग शून्य के सम होने के लिए उन संख्याओं को स्वतः (अलग अलग) शून्य होना चाहिए।

$$\text{अतः } क = 0 \text{ तथा } ख = 0$$

इससे साध्य का उपपादन होता है।

साध्य २— यदि दो संकर राशियाँ परस्पर सम हों तो उनके वास्तविक घटक तथा काल्पनिक घटक सम होते हैं।

यदि  $k + शख = ग + शघ$ .....(१)

तो यह उपपादन करना है कि  $k = ग$  तथा  $ख = घ$ ।

(१) में पक्षान्तरण करने से

$$(k - ग) + श (ख - घ) = 0$$

$(k - ग) + श (ख - घ)$  यह संकर राशि शून्य के सम होने से  $k - ग = 0$  तथा  $ख - घ = 0$

[साध्य १ के अनुसार

$$\therefore k = ग \text{ तथा } ख = घ$$

३.८१ साध्य ३— दो अनुषङ्ग संकर राशियों का योग तथा गुणनफल वास्तविक होता है।

मान लो  $k + शख$  संकर राशि है।  $k - शख$  इसकी अनुषङ्ग होगी।

इनका योग  $(k + शख) + (k - शख) = २क$  वास्तविक है।

इनका गुणनफल  $(k + शख)(k - शख)$

$$= k^2 - श^2 ख^2$$

$$= क^२ + ख^२ \text{ वास्तविक है।}$$

३.८२ मापांक (modulus) की परिभाषा— संकर राशि के वास्तविक और काल्पनिक घटकों के वर्गमूल के योग के वर्गमूल की धन मर्यादा उस संकर राशि का मापांक कहना है। अतः  $k + शख$  अथवा  $k - शख$  का मापांक  $+ \sqrt{k^2 + ख^2}$  है।

साध्य ४— दो संकर राशियों के गुणनफल का मापांक उनके मापांकों के गुणनफल के सम होता है।

क + शख तथा ग + शघ दो संकर राशियाँ हैं जिनके मापांक क्रमशः  $\sqrt{क^2 + ख^2}$  तथा  $\sqrt{ग^2 + घ^2}$  हैं।

$$\begin{aligned}\text{इतका गुणनफल} &= (क + शख)(ग + शघ) \\ &= (कग - खघ) + श(खग + कघ)\end{aligned}$$

गुणनफल का मापांक

$$\begin{aligned}&= \sqrt{(कग - खघ)^2 + (खग + कघ)^2} \\ &= \sqrt{क^2 ग^2 + ख^2 घ^2 + क^2 घ^2 + ख^2 ग^2} \\ &= \sqrt{(क^2 + ख^2)(ग^2 + घ^2)} \\ &= \sqrt{(क^2 + ख^2)} \sqrt{(ग^2 + घ^2)} \\ &= क + शख तथा ग + शघ के मापांकों का गुणनफल\end{aligned}$$

३.२ गणित में यह रुढ़ि है कि संकर राशि, अन्तिम फल के हर में नहीं रहनी चाहिए। हर को इन संख्याओं से रिक करने की विधा को हर का परिमेयकरण (rationalization) कहते हैं।

उदाहरण १— हर को परिमेय करो  $\frac{३ + २श}{५ + ३श}$

हर को अनुयुक्त संकर राशि ५ - ३श है। अतः अंश तथा हर को इससे गुणा करने पर

$$\frac{३ + २श}{५ + ३श} \times \frac{५ - ३श}{५ - ३श} = \frac{१५ + ६ + श(१० - ९)}{५^2 - ३^2 श^2}$$

$$= \frac{21 + 24}{24 + 9}$$

$$= \frac{21 + 24}{33}$$

उदाहरण २— (य + शर) का वर्गमूल निस्सारण करो।

मान लो (य + शर) का वर्गमूल ग + शघ है

अर्थात् ग + शघ = (य + शर)<sup>½</sup>

दोनों पक्षों का वर्ग करने से

$$ग^2 - घ^2 + २शगघ = य + शर$$

दोनों पक्षों के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों के समीकरण से

$$य = ग^2 - घ^2 \dots\dots\dots (१)$$

$$र = २गघ \dots\dots\dots (२)$$

समीकार (१) तथा (२) का साधन करने पर ग तथा घ की ये अर्थापि प्राप्त होता है।

$$ग = \pm \left\{ \frac{\sqrt{य^2 + र^2} + य}{२} \right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$घ = \pm \left\{ \frac{\sqrt{य^2 + र^2} - य}{२} \right\}^{\frac{१}{२}}$$

समीकार (१) तथा (२) का समाधान करने वाली ग तथा घ की अर्थापि लेने से अपेक्षित वर्गमूल प्राप्त होता है।

## प्रश्नावलि ३

(१)  $\sqrt{110}$ ,  $^2\sqrt{320}$ ,  $^3\sqrt{180}$ ,  $^4\sqrt{64}$ ,  $^5\sqrt{600}$   
इनका सरलतम रूप में प्रहासन करो।

(२) (क)  $7 + \sqrt{3}$  (ख)  $3 + \sqrt{4}$  (ग)  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  के  
परिमेयकारक खण्ड निकालो।

(३) (क)  $^2\sqrt{7+2}$  (ख)  $^3\sqrt{1+3}$   
(ग)  $^2\sqrt{3} + ^3\sqrt{2}$  के परिमेयकारक खण्ड  
निकालो।

(४) (क)  $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$  (ख)  $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(ग)  $\frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{4}}$

इन के हरों का परिमेयकरण करो और जहां संभव हो,  
सरल करो।

(५) सरल करो—

$$\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}} - \frac{2(\sqrt{4}-\sqrt{2})}{\sqrt{49}-2\sqrt{10}}$$

[मद्रास]

(६) इन संख्याओं में से प्रत्येक की अनुयुक्त संख्या लिखो

(क)  $3+2\sqrt{5}$  (ख)  $1+3\sqrt{5}$  (ग)  $7+4\sqrt{5}$  जहां  
 $\sqrt{5} = \sqrt{-1}$

(७) (क)  $(3+2\sqrt{5})$  का  $(4-\sqrt{5})$  से गुणन करो  
(ख)  $(7\sqrt{5}-3)$  का  $(6-\sqrt{5})$  से गुणन करो।

(८) हर को परिमेय रूप में परिवर्तन करके व्यक्त करो—

(क)  $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$  (ख)  $\frac{1}{7+\sqrt{2}}$  (ग)  $\frac{1}{3+\sqrt{-2}}$

(घ)  $\frac{(3+2\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})}$

(९) क-शब्द के रूप में व्यक्त करो—

(अ)  $\frac{3+4\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$  (आ)  $\frac{1+2\sqrt{2}}{3-4\sqrt{2}}$

(इ)  $(क+\sqrt{2})$   $3-2\sqrt{2}$

(ई)  $(2+2\sqrt{2})$   $(1+\sqrt{3}\sqrt{2})$

(१०) य तथा र की अर्थात्, जिनसे इन समीकारों के समाधान होता है निश्चित करो।

(क)  $य + शर = 2 - 3\sqrt{2}$

(ख)  $2य - शर = 6 + 4\sqrt{2}$

(ग)  $(य + 3\sqrt{2})(1 + शर) = 4 - \sqrt{2}$

(घ)  $(य + 2 + 3\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2} शर$

(११) (क)  $-7 + 2\sqrt{2}$  (ख)  $4 + 12\sqrt{2}$  (ग)  $3 - 4\sqrt{2}$  के वर्गमूल निकालो।

(१२) यदि  $(क + शख)^{-1} = म$   $(क - शख)$  तो दिखाओ कि

$$क^2 + ख^2 = \frac{1}{म}$$

(१३) यदि  $य = कोज्या ६ + श ज्या ६$  तो दिखाओ कि

$$य^{-1} = कोज्या ६ - श ज्या ६$$

## चौथा अध्याय

### समान्तर श्रेणी

(arithmetical progression)

४.१ पूर्वानुपर (ARITHMETIC) राशियां, जिन्हें किसी निश्चित नियमानुसार लिखा जा सकता है, श्रेणी (progression) में रहती हैं।

जतः २, ५, ८, ११, जिसमें प्रत्येक पद पूर्व पद में ३ का योग करने से प्राप्त होता है, श्रेणी है। और ५, २५, १२५, ६२५ भी, जिसमें प्रत्येक पद पूर्व पद का ५ से गुणन करने पर प्राप्त होता है, श्रेणी है।

किन्तु २, ७, -१०, १५, २४ जिस में कोई भी पद पूर्व पद से किसी निश्चित नियम द्वारा प्राप्त नहीं किया जा सकता, श्रेणी नहीं है।

४.२ उस श्रेणी की राशियां, जिसका प्रत्येक पद, पूर्व पद में निश्चित राशि का योग अथवा वियोग करने से प्राप्त होता है समान्तर श्रेणी में रहती हैं। यह निश्चित राशि समान्तर श्रेणी का प्रचय (common difference) कहलाती है।



(२, ४, ६, ८, ... ) तथा (५, २, -१, -४, ... )  
इन समान्तर श्रेणियों का प्रचय क्रमशः २ और -३ है।

४.३ समान्तर श्रेणी में प्रथम पद का क से, अन्तपद का अ से, प्रचय का च से, पदसंख्या का स से, और योग का यो से अभिधान किया जायगा।

४.४ समान्तर श्रेणियों से सम्पन्न कुछ मूलभूत सूत्र—

(१) समान्तर श्रेणी का कोई भी पद निकालना।  
मान लो वृत्त श्रेणी का प्रथम पद क है और प्रचय च है।

प्रथम पद क और प्रचय च है।

अतः द्वितीय पद क + च होगा।

तृतीय पद क + २च होगा।

चतुर्थ पद क + ३च होगा।

.....

.....

पंद्रहवां पद क + १४च होगा।

यदि तब पद का पत से अभिधान किया जाय तो तब  
पद पत = क + (त - १) च होगा।

यदि अन्तपद अ सवां पद हो तो

अ = क + (स - १) च .

(२) स पदों का योग।

अपेक्षित योग का यो से अभिधान करने पर

यो = क + (क + च) + (क + २च) + ..... + (अ - २च)  
+ (अ - च) + अ ..... (१)

इसी योग को उत्क्रम (reverse order) में लिखने पर  

$$\text{यो} = \text{अ} + (\text{अ} - \text{च}) + (\text{अ} - २\text{च}) + \dots + (\text{क} + २\text{च}) + (\text{क} + \text{च}) + \text{क} \dots \dots \dots (२)$$

(१) और (२) का योग करने से  

$$२\text{यो} = (\text{क} + \text{अ}) + (\text{क} + \text{अ}) + \dots$$
 स अग्निवागों तक  
 [प्रत्येक समाकार में स पद होने के कारण]

$$२\text{यो} = \text{स} (\text{क} + \text{अ})$$

$$\text{यो} = \frac{\text{स}}{२} (\text{क} + \text{अ})$$

$$\text{अथवा यो} = \frac{\text{स}}{२} [२\text{क} + (\text{स} - १)\text{च}]$$

[अ = क + (स - १) च रखने पर]

अतः पूर्व लिखित सूत्रों से यह स्पष्ट है कि पदों की संख्या ज्ञात होने पर यदि (१) प्रथम पद और प्रचय अथवा (२) प्रथम पद और अन्त पद ज्ञात हों तो श्रेढी का योग निकाला जा सकता है।

उदाहरण १— १०, ११ $\frac{१}{२}$ , १३, १४ $\frac{१}{२}$ . इस श्रेढी का १४ पदों तक योग निकालो।

दत्त श्रेढी में प्रथम पद १० है, प्रचय  $\frac{३}{२}$  है और पदों की संख्या १४ है।

$$\begin{aligned} \therefore \text{यो} &= \frac{१४}{२} [२ \times १० + (१४ - १) \times \frac{३}{२}] \\ &= ७ [२० + \frac{३९}{२}] \\ &= २७६\frac{३}{२} \end{aligned}$$

उदाहरण २— किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद १० है १८वां पद ९५ है। श्रेणी का प्रचय और २० पदों का योग निकालो।

यदि दत्त श्रेणी का प्रचय च हो तो

१८वां पद  $10 + 17$  च होगा

$$\therefore 95 = 10 + 17 \text{ च}$$

$$\text{अथवा च} = 5$$

अतः २० पदों का योग

$$= \frac{20}{2} [2 \times 10 + (20 - 1)5]$$

$$= 10 [20 + 95]$$

$$= 1150$$

$\therefore$  २० पदों का अपेक्षित योग ११५० है और प्रचय ५ है।

उदाहरण ३— यदि किसी समान्तर श्रेणी में तवां पद  $t - 5$  है तो उस के १८ पदों का योग निकालो।

$$\text{यहाँ पद} = t - 5$$

$$p_1 = t - 5 = 3 \quad t = 1 \text{ रखने पर}$$

$$p_2 = 16 - 5 = 11 \quad t = 2 \text{ रखने पर}$$

$$p_3 = 28 - 5 = 19 \quad t = 3 \text{ रखने पर}$$

$$\therefore \text{प्रचय} = p_3 - p_1 = 19 - 3 = 16$$

$$\therefore \text{योग} = \frac{18}{2} [2 \times 3 + 17 \times 16]$$

$$= 9 [6 + 272]$$

$$= 2496$$

४.५ समान्तर मध्यक (arithmetic mean)—यदि क तथा ख के बीच में म का निवेश (insertion) करने पर क, म, ख समान्तर श्रेणी में हों तो म को, क और ख का समान्तर मध्यक कहते हैं।

म की अर्धा सरलता से निकाली जा सकती है क्योंकि क, म, ख समान्तर श्रेणी में हैं।

$$\text{इसलिए } ख - म = म - क$$

$$\text{अथवा } म = \frac{क + ख}{2}$$

अनेक समान्तर मध्यक (arithmetic means)—यदि क तथा ख राशियों के बीच में  $m_1, m_2, \dots$  म<sub>त</sub> का निवेश करने पर क,  $m_1, m_2, m_3, \dots$  म<sub>त</sub>, ख समान्तर श्रेणी में हों तो  $m_1, m_2, \dots$  म<sub>त</sub> क तथा ख के समान्तर मध्यक कहलायेंगे।

४.६ क तथा ख के बीच में त समान्तर मध्यकों का निवेश करना।

मान लो  $m_1, m_2, m_3, \dots$  म<sub>त</sub> अपेक्षित समान्तर मध्यक हैं।

अतः परिभाषानुसार

क,  $m_1, m_2, \dots$  म<sub>त</sub>, ख ये  $(t+2)$  पद समान्तर श्रेणी में हैं। इस श्रेणी का अन्त पद ख तथा प्रथम पद क है। यदि प्रचय च हो तो  $ख = क + (t+1) च$

$$\text{अथवा } च = \frac{ख - क}{t+1}$$

अतः  $m_1 = +$  दूसरा पद

$$= k + \frac{x - k}{t + 1}$$

$m_2 =$  तीसरा पद

$$= k + 2 \frac{(x - k)}{t + 1}$$

$m_t = (t + 1)$ वा पद

$$= k + t \frac{(x - k)}{t + 1}$$

अतः  $m_1, m_2, \dots, m_t$  की अर्थापे क्रमशः

$$k + \frac{x - k}{t + 1}, k + 2 \frac{x - k}{t + 1}, \dots$$

$$k + t \frac{(x - k)}{t + 1} \text{ है}$$

उदाहरण— ५३ तथा १२ के बीच में ८ समान्तर मध्यक  
निर्देश करो।

मान लो अपेक्षित मध्यक  $m_1, m_2, \dots, m_8$  हैं।

इसलिए ५३,  $m_1, m_2, \dots, m_8, १२$  समान्तर श्रेणी में  
होने चाहियें।

इसमें ५३ प्रथम पद, और १२, १०वा पद है।

यदि प्रचय च हो तो

$$१२ = ५३ + ९ च$$

$$\therefore च = \frac{३}{२}$$

∴ ७, ८, १०, ११, ... १७ आदि अपेक्षित मध्यक

हैं।

४.७ यदि किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद, प्रचय और योग दिया हो तो पदों की संख्या निकालना।

वत्त समान्तर श्रृंखला में यो, क, और च की अर्थापेक्षित दो हुई हैं।

अतः स की अर्थापेक्षित करने के लिए अनुच्छेद ४.३ में दिए गए सम्यन्ध में यो, क, च की अर्थापेक्षितों का आदश करने पर

$$यो = \frac{s}{2} [२क + (स - १) च]$$

$$२यो = २सक + (स^२ - स) च$$

$$चस^२ + (२क - च) स - २यो = ०$$

यह स का द्विघात समीकरण है। अतः सामान्यतः स की दो अर्थापेक्षित प्राप्त होंगी। क्योंकि स पदों का सत्यापन का आभेधान करता है इसलिए आवश्यक रूप से स की घन पूर्णांक अर्थापेक्षित लेनी चाहिए। भिन्नीय तथा ऋण अर्थापेक्षित निरर्थक होंगी।

उदाहरण १— यदि ५१, ४८, ४५ इस समान्तर श्रेणी का योग ३९६ हो तो पदों की अपेक्षित संख्या निकालो।

मान लो पदों की संख्या स है।

$$प्रचय = ४८ - ५१ = -३$$

$$अतः ३९६ = \frac{s}{2} [२ \times ५१ + (स - १) (-३)]$$

$$= \frac{s}{2} [102 - 3s + 3]$$

$$\therefore 3s^2 - 104s + 99 = 0$$

$$\text{अथवा } s^2 - 34s + 33 = 0$$

$$\therefore s = 11 \text{ अथवा } 23$$

अतः दस योग के लिए श्रेढी के ११ अथवा २३ पद लेने चाहिये।

उदाहरण २— १, ४, ७, ... इस श्रेढी के कितने पद लेने से योग २८७ होगा?

इस श्रेढी में  $k=1$ ,  $a=3$  और  $yo=287$  है। यदि पदों की अपेक्षित संख्या  $s$  हो तो अनुच्छेद ४.४ में दिए गए सम्यग्ध में इन अर्थात्तों का आदर्श करने पर

$$287 = \frac{s}{2} [2 + (s-1)3]$$

$$574 = 2s + 3s^2 - 3s$$

$$3s^2 - s - 574 = 0$$

$$\therefore s = 14 \text{ अथवा } -\frac{41}{3}$$

$s$  की  $-\frac{41}{3}$  क्रम तथा भिन्नीय अर्थात्त त्वाज्य है।

अतः पदों की अपेक्षित संख्या १४ है।

४.८ समान्तर श्रेढी के कुछ विशेष गुण—

(१) यदि समान्तर श्रेढी के प्रत्येक पद में एक ही राशि का योग अथवा वियोग किया जाय तो नई श्रेढी

समान्तर थेंदी होगी और उसका प्रचय पाईला थड़ा क प्रचय के सम होगा।

मान लो दत्त समान्तर थेंदी क. क + च, क + २च.. है। इस के प्रत्येक पद में ख का योग करने पर क + ख, क + च + ख, क + २च + ख ... नई थेंदी हांगी। स्पष्टतः यह समान्तर थेंदी है जिसका प्रचय

$$\begin{aligned} & (क + २च + ख) - (क + च + ख) \\ &= (क + च + ख) - (क + ख) \\ &= च \end{aligned}$$

अतः उपर्युक्त कथन सत्य है।

(२) यदि किसी भी समान्तर थेंदी के प्रत्येक पद को एक ही अक्षर से गुणा किया जाय तो इससे प्राप्त नए पद समान्तर थेंदी में रहते हैं और प्राप्त थेंदी का प्रचय, दत्त अक्षर तथा दत्त समान्तर थेंदी क प्रचय का गुणनफल होता है।

मान लो क, क + च, क + २च, ..... दत्त थेंदी है। प्रत्येक पद को ख से गुणा करने पर क ख, (क + च) ख, (क + २च) ख ..... नए पद प्राप्त होते हैं।

ये पद स्पष्टतः समान्तर थेंदी में हैं। इस थेंदी का प्रचय  $(क + २च)ख - (क + च)ख = (क + च)ख - कख$   
 $= च \times ख$

अतः उपर्युक्त कथन सत्य है।

४.९ उदाहरण १— किसी समान्तर थेंदी के तीन अनुभागी पदों का गुणनफल १०५ है और योग १५ है। पदों की अर्थापे निकालो।



मान लो क-च, क, क+च ये तीन पद समान्तर थेदी में हैं।

इनका गुणन-फल १०५ है

$$\therefore क(क^2 - च^2) = १०५ \dots\dots\dots (१)$$

इनका योग १५ है

$$\therefore क-च+क+क+च=१५$$

$$\therefore ३क=१५$$

$$\text{अथवा } क=५ \dots\dots\dots (२)$$

(१) में क=५ रखने पर

$$५(२५ - च^2) = १०५$$

$$२५ - च^2 = २१$$

$$च^2 = ४$$

$$च = \pm २$$

अतः च=२ लेने से ३, ५, ७ ये पद मिलते हैं और च=-२ लेने से ७, ५, ३ ये पद मिलते हैं।

$\therefore$  अपेक्षित तीन पद ३, ५, ७ हैं।

उदाहरण २— यदि क, ख, ग समान्तर थेदी में हैं तो दिखाओ कि

$$(१) \frac{१}{खग}, \frac{१}{गक}, \frac{१}{कख}$$

(२) ख+ग, ग+क, क+ख भी समान्तर थेदी में हैं।

(१) यदि क, ख, ग समान्तर थेदी में हों तो

$\frac{१}{कख}$  से गुणा करने पर

क ख ग भी समान्तर श्रेणी में होंगे

$\therefore$   $\overset{1}{\text{ख}}, \overset{1}{\text{क}}, \overset{1}{\text{ग}}$  समान्तर श्रेणी में हैं।

(२) मान लो  $\text{ख} + \text{ग}, \text{ग} + \text{क}, \text{क} + \text{ख}$  समान्तर श्रेणी में हैं।

$$\therefore (\text{क} + \text{ख}) - (\text{ग} + \text{क}) = (\text{ग} + \text{क}) - (\text{ख} + \text{क})$$

$$\text{अर्थात् } \text{ख} - \text{ग} = \text{क} - \text{ख}$$

$$\text{अथ वा } \text{ग} - \text{ख} = \text{ख} - \text{क}$$

किन्तु यह क, ख, ग क समान्तर श्रेणी में रहने के लिए प्रतिबंध है।

यह दिया गया है कि क, ख, ग समान्तर श्रेणी में हैं  
अतः यह मानना कि  $\text{ख} + \text{ग}, \text{ग} + \text{क}, \text{क} + \text{ख}$  समान्तर श्रेणी में हैं, सत्य है।

### प्रश्नावलि ४

(१) निम्न श्रेणियों में सग पद निकालो—

(अ)  $९, ८\frac{1}{3}, ७\frac{2}{3}, \dots$

(आ)  $२, ९, १६, \dots$

(इ)  $४, १३, २२, \dots$

(ई)  $\frac{१}{क}, \frac{२}{क}, \frac{३}{क}, \dots$

(उ)  $\frac{१}{स}, \frac{स+१}{स}, \frac{२स+१}{स}, \dots$

(२) निम्न श्रेणियों का योग निकालो—

(अ) ३,  $3\frac{1}{2}$ ,  $4\frac{1}{2}$ , ..... २० पदों तक

(आ)  $5\frac{1}{2}$ ,  $6\frac{1}{2}$ ,  $7\frac{1}{2}$ , ..... १६ पदों तक

(इ)  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{6}{3}$ , ..... ३० पदों तक

(ई) ४,  $4\frac{1}{2}$ ,  $5\frac{1}{2}$ , ..... १० पदों तक

(उ) २.३५, ३.७, ५.०५, ..... २१ पदों तक

(ऊ)  $\frac{3}{\sqrt{4}}$ ,  $\frac{4}{\sqrt{4}}$ ,  $\frac{5}{\sqrt{4}}$ , ..... २५ पदों तक

(ए) (३क-५ख), (४क-७ख), (५क-९ख), .....  
...स पदों तक

(ऐ) १, ३, ५, ७, .....स पदों तक

(३) (अ)  $1\frac{1}{2}$  और  $6\frac{1}{2}$  के बीच में ११ मध्यक निवेश करो।

(आ) २ और  $4\frac{1}{2}$  के बीच में १० मध्यक निवेश करो।

(इ) १ और  $4\frac{1}{2}$  के बीच में ७ मध्यक निवेश करो।

(ई)  $3\frac{1}{2}$  और १ के बीच में स मध्यक निवेश करो।

(उ) क और ख के बीच में  $(२स + १)$  मध्यक निवेश करो और मध्य पद (middle term) की अर्था निकालो।

(४) किसी समान्तर श्रेणी में रहने वाले प्रत्येक दो अनुगामी पदों के बीच समान्तर मध्यकों की एक ही संख्या का निवेश किया जाय तो दिखाओ कि सब पद समान्तर श्रेणी में रहेंगे।

- (५) किसी समान्तर श्रेणी का १०वाँ पद १२ है और २०वाँ पद १७ है तो उसके १५ पदों का योग निकालो।
- (६) किसी समान्तर श्रेणी का १०वाँ पद २५ है और २५वाँ पद ५५ है। इस श्रेणी का ५०वाँ पद और ५० पदों तक योग निकालो।
- (७) यदि किसी समान्तर श्रेणी का सवाँ पद  $\frac{1}{2}$  (१०-उस) है तो सिद्ध करो कि इसके स पदों का योग  $\frac{s}{12}(13 - 3s)$  है।
- (८) किसी समान्तर श्रेणी के तीन अनुगामी पदों का योग ५१ है और पहले तथा तीसरे का गुणनफल २७३ है। पदों की अर्धाधि निकालो।
- (९) किसी समान्तर श्रेणी में रहने वाली ५ संख्याओं का योग २५ है और प्रथम तथा अन्त के पदों का गुणनफल १६ है तो संख्याओं की अर्धाधि निकालो।
- [नागपुर १९२९]
- (१०) किसी समान्तर श्रेणी में ६ पद हैं। सिद्ध करो कि प्रथम और अन्त के पदों का योग तीसरे और चौथे पदों के योग के सम है।
- (११) किसी समान्तर श्रेणी का सवाँ पद  $\frac{s}{6} - \frac{1}{6}$  है तो उसके १२ पदों का योग निकालो।
- २) किसी समान्तर श्रेणी का तवाँ पद  $\frac{1}{3}(t+4)$  है तो

उसके १६ पदों का योग निकालो।

- (१३) ५, ७, ९,... इस श्रेणी के कितने पद लेने से योग ४८० होगा ?
- (१४) ३ से आरंभ कर कितनी पूर्वांशपर अयुग्म संख्याएँ लेनेसे उनका योग २८८ होगा ?
- (१५) यदि ५, ८, ११,.....इस समान्तर श्रेणी के स पदों का योग १०२५ हो तो पदों की अपेक्षित संख्या निकालो।
- (१६) किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद ७२ तथा प्रचय ५ है। इस श्रेणी का योग १४६३ होने के लिए कितने पद लेने चाहिए ?
- (१७) किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद ४ है और अन्तपद १०९ है। यदि उसके स पदों का योग २०३४ हो तो स की अर्धा निकालो।
- (१८) एक व्यक्ति अपने मित्र को १००० रु० उधार देता है। परस्पर यह ठहराव होता है कि वह व्याज न लेगा और धन उत्तरोत्तर २ रु० से न्यून होने वाले मासिक प्रभागों में लौटा लेगा। यदि पहला प्रभाग ६४ रु० हो तो उधार दिया हुआ धन कितने मासों में चुकाया जा सकेगा ?
- (१९) एक सीधी सड़क पर १०० पत्थर पांच पांच यष्टियों (yard) के अन्तर पर रखे गए हैं। पहले पत्थर से ५ यष्टियों के अन्तर पर रखे हुए पात्र के पास से एक दौड़ने वाला दौड़ना प्रारंभ करता है। यदि वह एक-एक करके पत्थरों को उठाकर पात्र में डालता जाय तो

उसे कितनी यष्टियां दौड़ना होगा ?

- (२०) दिखाओ कि ४, १२, २०, २८,.....इस श्रेढी के स पदों का योग किसी युग्म संख्या का वर्ग है।
- (२१) सिद्ध करो कि किसी भी समान्तर श्रेढी में २ स पदों के उत्तरार्ध का योग, प्रथम ३<sup>स</sup> पदों के योग का  $\frac{1}{3}$  होता है।
- (२२) सिद्ध करो कि १, ३, ५, ७,.....इस श्रेढी में पदों की जिसो भी युग्म संख्या के पूर्वार्ध और उत्तरार्ध के योगों की निष्पत्ति अचल है।
- (२३) यदि किसी समान्तर श्रेढी में  

$$यो_m = \frac{1}{2} यो_m + स = \frac{1}{2} यो_m + त$$
 हो तो सिद्ध करो कि  

$$स \times त = म (म + स + त)$$
 [मद्रास १९००]
- (२४) किन्हीं दो समान्तर श्रेढियों के स पदों के योगों की निष्पत्ति यदि  $\frac{३ स + १}{४ स - ६}$  हो तो उनके १५<sup>व</sup> पदों की निष्पत्ति निकालो।
- (२५) दो समान्तर श्रेढियों के स पदों के योगों की निष्पत्ति  $(३स + ३१) : (५स - ३)$  है। दिखाओ कि उनके ९<sup>व</sup> पद एक ही हैं।
- (२६) प्राकृतिक संख्याओं को इन समूहों में विभक्त किया गया है—  
 १. (२+३), (४+५+६), (७+८+९+१०),.....  
 और इसी प्रकार आगे भी।

सिद्ध करो कि सर्व समूह की संख्याओं का योग

$\frac{1}{2} s (s^2 + 1)$  है। [कलकत्ता

(२७) अयुग्म संख्याओं को इन समूहों में विभक्त किया गया है—

$(1+3), (4+7+9+11), (13+15+17+19+21+23), \dots$

दिखाओ कि सर्व समूह के पदों का योग  $s^3$  है।  
अतः हमसे यह अनुमान निकालो कि प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के योग का घन है।

(२८) यदि किसी श्रेणी के स पदों का योग  $ks^2 + ख$  हो, जिसमें  $k$  तथा  $ख$  अचल हैं, तो सिद्ध करो कि यह समान्तर श्रेणी है।

[भागपुर १९३१]

(२९) यदि किसी समान्तर श्रेणी के स पदों का योग  $ks^2$  हो तो श्रेणी निकालो।

(३०) यदि किसी समान्तर श्रेणी का  $t$ वाँ पद  $k$  और  $t$ वाँ पद  $ख$  हो, तो दिखाओ कि  $(t+थ)$  पदों का योग  $\frac{t+थ}{2} [k+ख+\frac{k-ख}{t-थ}]$  है।

(३१) यदि किसी समान्तर श्रेणी के  $t$  पदों का योग  $थ$  हो और  $थ$  पदों का योग  $t$ , तो उसके  $(t+थ)$  पदों का योग निकालो।

- (३२) यदि किसी समान्तर श्रेणी के त पदों का योग थ पदों के योग के सम हो तो दिखाओ कि (त+थ) पदों का योग शून्य के सम है।
- (३३) यदि किसी समान्तर श्रेणी का त<sup>वा</sup>, थ<sup>वा</sup>, द<sup>वा</sup> पद क्रमशः ट, ठ, ड हो तो दिखाओ कि  

$$\tau (\theta - d) + \theta (d - t) + \delta (t - \theta) = 0$$
- (३४) यदि किसी समान्तर श्रेणी के त, थ, द पदों के योग क्रमशः ट, ठ, ड हों तो दिखाओ कि  

$$\tau \frac{\theta - d}{t} + \theta \frac{d - t}{\theta} + \delta \frac{t - \theta}{d} = 0$$
- (३५) यदि  $\frac{1}{ख+ग}, \frac{1}{ग+फ}, \frac{1}{फ+ख}$  समान्तर श्रेणी में हों तो दिखाओ कि  $फ^2, ख^2, ग^2$  भी समान्तर श्रेणी में होंगे।
- (३६) यदि  $(ख-ग)^2, (ग-फ)^2, (फ-ख)^2$ , समान्तर श्रेणी में हों तो दिखाओ कि  

$$\frac{1}{ख-ग}, \frac{1}{ग-फ}, \frac{1}{फ-ख}$$
 भी समान्तर श्रेणी में होंगे।
- (३७) यदि  $कय = ख^2 = ग^3$  और  $ख^2 = दग$  तो दिखाओ कि य, र, ल समान्तर श्रेणी में हैं।



## पांचवां अध्याय

### गुणोत्तर श्रेणी

(geometrical progression)

५.१ जिस श्रेणी में किसी पद की, पूर्वगामी पद से निष्पत्ति एक ही रहती है वह गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है।

१, २, ४, ८, १६, ३२, .....

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

क, कन, कन<sup>२</sup>, कन<sup>३</sup>, ..... ये गुणोत्तर श्रेणी के उदाहरण हैं।

साधारण निष्पत्ति (common ratio)—जिस साधारण गुणोत्तर से पद बढ़ते या घटते हैं उसे साधारण निष्पत्ति कहते हैं। साधारण निष्पत्ति किसी भी पद का पूर्वगामी पद से भाजन करने पर मिलती है। उदाहरणार्थ प्रथम श्रेणी में साधारण निष्पत्ति २ है और द्वितीय तथा तृतीय श्रेणी में वह क्रमशः  $\frac{1}{3}$  और न है।

५.१२ गुणोत्तर श्रेणी के किसी पद को निकालना—

मान लो गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद क तथा साधारण निष्पत्ति न है। पहिले पद को न से गुणा करने पर द्वितीय पद प्राप्त होता है।

अथ प्रथम पद क है।

अतः द्वितीय पद कन होगा।

तृतीय पद कन<sup>२</sup> होगा।

चतुर्थ पद कन<sup>३</sup> होगा।

तेरहवां पद कन<sup>१२</sup> होगा।

यदि त<sup>थे</sup> पद का अभिधान प<sub>त</sub> से किया जाय तो त<sup>था</sup> पद

$p_t = k n^{t-1}$  होगा।

अतः ऊपर के पदों के अवलोकन से यह नियम बन सकता है कि किसी पद में न का घात, उस पद की संख्या से एक अंक न्यून होता है।

५.१३ यदि गुणोत्तर श्रेढी के किन्हीं दो पदों की अर्ही ज्ञात हो तो यह श्रेढी पूर्णतया निर्दिष्ट हो सकती है।

मान लो त<sup>ग</sup> और थ<sup>ग</sup> पद क्रमशः अ और आ हैं।

यदि गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद क और साधारण निष्पत्ति न हो तो त<sup>थे</sup> और थ<sup>थे</sup> पदों की अर्ही ये होंगी—

$p_t = k n^{t-1}$  किन्तु  $p_t = अ$

$\therefore k n^{t-1} = अ \dots \dots \dots (१)$

और

$p_y = k n^{y-1}$  किन्तु  $p_y = आ$

$$\therefore \text{कन}^{य-१} = \text{अ} \dots\dots\dots (२)$$

अतः (१) का (२) से भाजन करने पर

$$\frac{\text{कन}^{य-१}}{\text{कन}^{य-१}} = \frac{\text{अ}}{\text{अ}}$$

$$\text{न}^{न-य} = \frac{\text{अ}}{\text{अ}}$$

$$\text{अथवा न} = \left[ \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \right]^{न-य} \dots\dots\dots (३)$$

(१) में न की इस अर्हा का आदेश करने पर

$$\text{क} \left[ \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \right]^{\frac{न-१}{न-य}} = \text{अ}$$

$$\therefore \text{क} = \text{अ} \left[ \frac{\text{अ}}{\text{अ}} \right]^{न-१} \dots\dots\dots (४)$$

क और न की अर्हाएं ज्ञात होने से श्रेढी पूर्णतया निर्दिष्ट हो जाती है।

उदाहरण— किसी गुणोत्तर श्रेढी में ४वा और ७वा पद क्रमशः ४० और ३२० है। इस का ५वा पद निकालो।

मान लो दत्त श्रेढी का प्रथम पद क है और साधारण निष्पत्ति न।

$$\therefore \text{प}_४ = \text{कन}^३ = ४० \dots\dots\dots (१)$$

$$\therefore \text{प}_७ = \text{कन}^६ = ३२० \dots\dots\dots (२)$$

$$\therefore \frac{\text{प}_७}{\text{प}_४} = \frac{\text{कन}^६}{\text{कन}^३} = \frac{३२०}{४०}$$

$$\text{अथवा न}^३ = ८$$

$$\therefore \text{न} = २$$

(१) में  $n=2$  रखने पर  $\Sigma = 4$  प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\therefore P_4 &= k \times n^4 \\ &= 4 \times 2^4 \\ &= 64\end{aligned}$$

५.२ गुणोत्तर मध्यक (geometric mean)— यदि तीन राशियाँ  $k$ ,  $m$  और  $x$  गुणोत्तर श्रेणी में हों तो  $m$ ,  $k$  तथा  $x$  का गुणोत्तर मध्यक कहलाता है। अथवा

$k$  तथा  $x$  के बीच में  $m$  का निवेश करने पर यदि  $k$ ,  $m$ ,  $x$  गुणोत्तर श्रेणी में रहते हों तो  $m$ ,  $k$  और  $x$  का गुणोत्तर मध्यक कहलाता है।

$m$  की जगह  $k$  और  $x$  के पदों में निकाली जा सकती है। क्योंकि  $k$ ,  $m$ ,  $x$  गुणोत्तर श्रेणी में हैं

इसलिए  $\frac{m}{k} = \frac{x}{m}$

अथवा  $m^2 = kx$

$m = \pm \sqrt{kx}$

अतः दो राशियों का गुणोत्तर मध्यक उनके गुणनफल का धर्गमूल होता है।

अनेक गुणोत्तर मध्यक (geometric means)— यदि  $k$  तथा  $x$  इन दो राशियों के बीच में  $m_1, m_2, \dots, m_n$  का निवेश करने पर  $k, m_1, m_2, \dots, m_n, x$  गुणोत्तर श्रेणी में हों तो  $m_1, m_2, \dots, m_n$  ये  $k$  और  $x$  के गुणोत्तर मध्यक कहलाते हैं।

५.२१ दो राशियों के बीच में मध्यकों की दत्त संख्या निवेश करना— मान लो  $k$  और  $x$  दो राशियाँ हैं जिनके

यौच में त (दत्त संख्या) मध्यकों का निवेश करना है।

मान लो  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_t$  अपेक्षित मध्यक हैं।

$\therefore$  फ,  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_t$ , ख गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

मान लो इस गुणोत्तर श्रेणी की साधारण निष्पत्ति न है।

अतः इस गुणोत्तर श्रेणी में, जिसका प्रथम पद फ है और साधारण निष्पत्ति न है, ख  $(t+1)^{\text{वां}}$  पद होगा।

$$\therefore \text{ख} = \text{फ} \times n^{t+1}$$

$$\text{अथवा } n^{t+1} = \frac{\text{ख}}{\text{फ}}$$

$$\therefore n = \left[ \frac{\text{ख}}{\text{फ}} \right]^{\frac{1}{t+1}}$$

$$\text{अब } m_1 = \text{दूसरा पद} \\ = \text{फ} \times n$$

$$= \text{फ} \left[ \frac{\text{ख}}{\text{फ}} \right]^{\frac{1}{t+1}}$$

$$m_2 = \text{तीसरा पद} \\ = \text{फ } n^2$$

$$= \text{फ} \left[ \frac{\text{ख}}{\text{फ}} \right]^{\frac{2}{t+1}}$$

.....

$$\text{इसी प्रकार } m_t = (t+1)^{\text{वां पद}} \\ = \text{फ} \times n^t$$

$$= \text{फ} \left[ \frac{\text{ख}}{\text{फ}} \right]^{\frac{t}{t+1}}$$

अतः अपेक्षित मध्यक  $m_1, m_2, \dots, m_t$

क्रमशः  $k \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ ,  $k \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}$ ,  $k \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}$  है

उदाहरण—३ और  $\frac{3}{256}$  के बीच में ७ गुणोत्तर मध्य-

कों का निवेश करो।

मान लो  $m_1, m_2, \dots, m_7$  अपेक्षित मध्यक हैं।

$\therefore 3, m_1, m_2, \dots, m_7, \frac{3}{256}$  गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

अब इस श्रेणी में ९ पद हैं, प्रथम पद ३ है तथा ९ वाँ पद  $\frac{3}{256}$  है। यदि साधारण निष्पत्ति 'न' हो तो

$$\frac{3}{256} = 3 \times n^8$$

$$n^8 = \frac{1}{256}$$

$$= 2^{-2}$$

$$\therefore n = \pm \frac{1}{2}$$

अब  $n = +\frac{1}{2}$  होने पर

$$m_1 = \text{दूसरा पद}$$

$$= 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$m_2 =$  तीसरा पद

$$= 3 \left[ \frac{1}{2} \right]^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

.....

$m_0 =$  ८वाँ पद

$$= 3 \left[ \frac{1}{2} \right]^8$$

$$= \frac{3}{128}$$

अतः अपेक्षित मध्यक

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{3}{128} \text{ हैं।}$$

तथा  $n = -\frac{1}{2}$  होने पर

अपेक्षित मध्यक

$$-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots, -\frac{3}{128} \text{ होंगे।}$$

५.३ जिसमें प्रथम पद  $k$  है और साधारण निष्पत्ति  $n$  है ऐसी गुणोत्तर श्रेणी का  $s$  पदों तक योग निकालना।

मान लो  $k, kn, kn^2, \dots, kn^{s-1}$  यह दत्त श्रेणी है।

$s$  पदों के योग का योग से अभिधान करने पर

$$y = k + kn + kn^2 + \dots + kn^{s-1} \dots \dots \dots (1)$$

दोनों पक्षों का साधारण निष्पत्ति 'न' से गुणा करने पर  
 $यो \times न = ३न + ६न^२ + ..... + ६न^{१८-१} + ६न^{१८} ... (२)$

(१) में से (२) को घटाने पर

$$यो (१ - न) = ६ (१ - न^{१८})$$

$$\therefore यो = \frac{६ (१ - न^{१८})}{१ - न}$$

उदाहरण १—  $\sqrt{३}, १, \frac{१}{\sqrt{३}}, \frac{१}{३} \dots \dots$  इस श्रेणी के १८ पदों का योग निकालो।

दत्त श्रेणी में प्रथम पद  $\sqrt{३}$  है, साधारण निष्पत्ति  $\frac{१}{\sqrt{३}}$  है और पदों की संख्या १८ है

अतः १८ पदों का योग

$$यो = \frac{\sqrt{३} (१ - (\frac{१}{\sqrt{३}})^{१८})}{१ - \frac{१}{\sqrt{३}}}$$

$$= \frac{३ (१ - \frac{१}{३^९})}{\sqrt{३} - १}$$

$$= \frac{(३^{१०} - १)}{३^९ (\sqrt{३} - १)}$$

$$= \frac{१९६८३ - १}{३^९ (\sqrt{३} - १)}$$



$$= \frac{12642}{6461 (\sqrt{3}-1)}$$

एर के परिमेयकरण से

$$\begin{aligned} \text{यो} &= \frac{12642}{6461 (\sqrt{3}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{12642 (\sqrt{3}+1)}{6461} \end{aligned}$$

उदाहरण २— १, २, ४, ..... इस श्रेणी के पदों का योग २५५ रहने के लिए कितने पद लेने चाहियें ?

दत्त श्रेणी का प्रथम पद १ है और योग २५५ है।  
मान लो पदों की संख्या स है।

$$\text{साधारण निष्पत्ति} = \frac{2}{1} = 2$$

अतः

$$255 = \frac{2s-1}{2-1}$$

$$= 2s-1$$

$$2s = 256$$

$$= 2^8$$

$$\therefore s = 4$$

अतः अपेक्षित योग के लिए ८ पद लेने चाहियें।

## प्रश्नावलि ५

(१) इन श्रेणियों में निर्दिष्ट पद निकालो—

(क) १, -२, ४, -८, ... इसमें १०वाँ पद

(ख) ३०, १५, ७.५, ..... इसमें ७वाँ पद

(ग)  $\frac{1}{4}, -\frac{2}{16}, \frac{8}{64}, \dots$  इसमें ८वाँ पद

(घ)  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \dots$  इसमें सवाँ पद

(२) इन श्रेणियों का योग निकालो—

(क)  $2 + 4 + 6 + \dots$  १० पदों तक

(ख)  $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots$  ६ पदों तक

(ग)  $2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots$  १२ पदों तक

(घ)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots$  स पदों तक

(ङ)  $k^2 + k^2 + 8 + k^2 + 16 + \dots$  स पदों तक

(च)  $\frac{k}{y} \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} + \dots$  ५ पदों तक

(३) किसी गुणोत्तर श्रृंखला में रहने वाले तीन अनुगामी पदों का गुणनफल २१६ है और शुरू में उनके गुणनफल का योग १२६ है। पदों की पहचान निकालो।

(४) किसी गुणोत्तर श्रेणी में रहने वाले तीन पदों का योग २४ है और गुणनफल ६४ है। पदों की अर्थापि निकालो।

(५) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी में ६ पद हों तो सिद्ध करो कि प्रथम तथा अन्त-पद का गुणनफल तृतीय तथा चतुर्थ पदों के गुणनफल के सम है।

(६) किसी गुणोत्तर श्रेणी में रहने वाले स पदों का योग  $y$  है, गुणनफल  $r$  है और पदों के व्युत्क्रमों का योग  $l$  है। सिद्ध करो कि

$$r^s = \left(\frac{y}{l}\right)^s \quad [\text{नागपुर}]$$

(७) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद  $k$  हो, सर्वा पद  $a$  हो और प्रथम स पदों का गुणनफल  $g$  हो तो सिद्ध करो कि

$$g = (k \times a)^{\frac{s}{2}} \quad [\text{कलकत्ता १९१८}]$$

(८) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के स पदों का योग ७२८ हो, साधारण निष्पत्ति ३ हो और प्रथम पद २ हो तो स की अर्था निकालो।

(९) किसी गुणोत्तर श्रेणी की साधारण निष्पत्ति ३ है। प्रथम और तृतीय पदों का योग, प्रथम और द्वितीय पदों के वर्ग के योग के सम है। श्रेणी के स पदों का

योग निकालो और यदि स=६ हो तो दिखाओ कि योग ३६४ है।

(१०) (क)  $\frac{१}{२७}$  और ९ के बीच में ४ गुणोत्तर मध्यक निवेश करो।

(ख) २ तथा ४८६ के बीच में ४ गुणोत्तर मध्यक निवेश करो।

(ग)  $\frac{३२}{८१}$  तथा  $\frac{९}{२}$  के बीच में ५ गुणोत्तर मध्यक निवेश करो।

(घ) २७ तथा  $\frac{१}{२७}$  के बीच में ५ गुणोत्तर मध्यक निवेश करो।

(११) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी में प्रथम पद २ और १०वाँ पद १ हो तो साधारण निष्पत्ति का निश्चय करो।

(१२) किन्हीं दो संख्याओं का योग उनके गुणोत्तर मध्यक से ९ अधिक है और उनके योग का वर्ग, उनके गुणनफल से १८९ अधिक है। संख्याएँ निकालो।

[मद्रास

(१३) यदि क तथा ख इन दो राशियों के बीच में २ गुणोत्तर मध्यक निवेश किए जायें तो दिखाओ कि इन मध्यकों का गुणनफल (क ख)<sup>१५</sup> के सम है।

(१४) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी में पदों की संख्या युग्म हो

तो दिखाओ कि आदि और अन्त पदों से सम-दूर पदों का गुणनफल दो मध्य पदों के गुणनफल के सम है। [पंजाब

(१५) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के स, २ स, और ३ स पदों का योग क्रमशः यो<sub>१</sub>, यो<sub>२</sub> और यो<sub>३</sub> हो तो दिखाओ कि  $यो_1[यो_3 - यो_2] = [यो_2 - यो_1]^2$

(१६) यदि यो<sub>१</sub>, यो<sub>२</sub>, ... .. यो<sub>स</sub> किसी गुणोत्तर श्रेणी के क्रमशः १, २, ... .. स पदों के योगों का अभिधान करने हों तो  $(यो_1 + यो_2 + यो_3 + \dots + यो_स)$  की धर्मा निकालो।

(१७) यदि  $फ : ख = २ + \sqrt{३} : २ - \sqrt{३}$  तो सिद्ध करो कि  $फ$  तथा  $ख$  के बीच का समान्तर मध्यक गुणोत्तर मध्यक का दुगुना है।

(१८) यदि  $फ$  और  $ख$  के बीच का समान्तर मध्यक उनके गुणोत्तर मध्यक के प्रति ऐसा हो जैसा  $म$  है  $न$  के प्रति तो दिखाओ कि

$$\frac{फ}{ख} = \frac{म + \sqrt{म^2 - न^2}}{म - \sqrt{म^2 - न^2}}$$

(१९) यदि  $फ + ख + ग, \sqrt{फ^2 + ख^2 + ग^2}$  और  $फ - ख + ग$  गुणोत्तर श्रेणी में हों तो सिद्ध करो कि  $फ, ख$  और  $ग$  गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

(२०) यदि  $फ, ख, ग, घ$  गुणोत्तर श्रेणी में हों तो सिद्ध करो कि  $फ^2 + ख^2, ख^2 + ग^2, ग^2 + घ^2$  भी गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

(२१) यदि क, ख, ग समान्तर श्रेणी में और य, र, ल गुणोत्तर श्रेणी में हों तो सिद्ध करो कि

$$यख-ग \times रग-क \times लक-य = १$$

(२२) यदि क, ख तथा ग गुणोत्तर श्रेणी में हों और य तथा र क्रमशः क, ख तथा ख, ग के बीच के समान्तर मध्यक हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{क}{य} + \frac{ग}{र} = २ \text{ और } \frac{१}{य} + \frac{१}{र} = \frac{२}{ख}$$

(२३) किसी गुणोत्तर श्रेणी में  $(n+x)$ वाँ पद =  $m$ , और  $(n-x)$ वाँ पद =  $n$  है। तब और  $x$ वाँ पद निकालो।

(२४) किसी समान्तर श्रेणी का प्रथम पद और किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद एक ही है। एक का प्रथम और दूसरे की साधारण निष्पत्ति दोनों २ के सम हैं। दोनों के ५ पदों का योग समान है। प्रत्येक श्रेणी का ५ वाँ पद निकालो।

५.४ समान्तर गुणोत्तर श्रेणी (arithmetic-geometric series) — क,  $(क+ख)न$ ,  $(क+२ख)न^२$ ,  $(क+३ख)न^३$ , .....

इस प्रकार की श्रेणी पर विचार करो।

इस के प्रत्येक पद में दो खण्ड हैं।

प्रथम पद क और १ का गुणनफल है।

द्वितीय पद  $(क+ख)$  और  $न$  का गुणनफल है।

तृतीय पद  $(क+२ख)$  और  $न^२$  का गुणनफल है।

चतुर्थ पद  $(क + ३ख)$  और  $न^३$  का गुणनफल है ।

यह स्पष्ट है कि  $क$ ,  $क + ख$ ,  $क + २ख$ ,  $क + ३ख$  समान्तर श्रेणी में हैं और

१,  $न$ ,  $न^२$ ,  $न^३$ ..... गुणोत्तर श्रेणी में हैं ।

इसमें यह ज्ञात होता है कि इस श्रेणी के पद अंशतः समान्तर श्रेणी के और अंशतः गुणोत्तर श्रेणी के नियमानुसार बनते हैं ।

इस प्रकार की श्रेणी समान्तर गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है ।

५.४१ समान्तर गुणोत्तर श्रेणी का स पदों तक योग— यदि  $क$ ,  $(क + ख)न$ ,  $(क + २ख)न^२$ ,..... इस श्रेणी के स पदों के योग का यो से अभिधान किया जाय तो

यो =  $क + (क + ख)न + (क + २ख)न^२ + \dots$

+  $[क + (स - २)ख]न^{स-२} + [क + (स - १)ख]न^{स-१} \dots (१)$

गुणोत्तर श्रेणी की साधारण निष्पत्ति न से दोनों पक्षों का गुणा करने पर इस प्रकार विन्यस्त करो—

यो  $\times न = कन + (क + ख)न^२ + \dots$

+  $[क + (स - २)ख]न^{स-१} + [क + (स - १)ख]न^स \dots (२)$

(२) को (१) में से घटाने पर

यो  $(१ - न) = क + [खन + खन^२ + \dots खन^{स-१}]$

-  $[क + (स - १)ख]न^स$

प्रथम अभिधार में  $(स - १)$  पदों की गुणोत्तर श्रेणी है ।

इन (स-१) पदों का योग करने पर -

$$\text{यो (१-न)} = \text{क} + \frac{\text{खन} [१-न^{स-१}]}{१-न} - [\text{क} + \text{स-१ख}]न^{स}$$

$$\therefore \text{यो} = \frac{\text{क}}{१-न} + \frac{\text{खन} [१-न^{स-१}]}{(१-न)^२} - \frac{[\text{क} + (\text{स}-१) \text{ख}] न^{स}}{१-न}$$

यह वस्तु समान्तर गुणोत्तर श्रेणी के स पदों का योग है।

उदाहरण —  $१ + ४य + ७य^२ + १०य^३ + \dots$  इस श्रेणी के स पदों का योग निकालो।

यदि इस श्रेणी के स पदों का योग का 'यो' से अभिधान किया जाय तो

$$\begin{aligned} \text{यो} &= १ + ४य + ७य^२ + १०य^३ + \dots \\ &+ [१+३(स-२)] य^{स-१} \\ &+ [१+३(स-१)] य^{स-१} \dots (१) \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का य से गुणन करने पर

$$\begin{aligned} \text{यो} \times \text{य} &= य + ४य^२ + ७य^३ + १०य^४ + \dots \\ &+ [१+३(स-२)] य^{स-१} + [१+३(स-१)] य^{स} \dots (२) \end{aligned}$$

(१) में से (२) को घटाने पर

$$\begin{aligned} \text{यो (१-य)} &= १ + ३य + ३य^२ + \dots + ३य^{स-१} \\ &\quad - [१+३(स-१)] य^{स} \\ &= १ + ३य [१ + य + य^२ + \dots + य^{स-१}] \\ &\quad - (३स-२) य^{स} \end{aligned}$$



$$= 1 + 3y \frac{1-y^{n-1}}{1-y} - (3s-2)y^n$$

$$\therefore \text{यो} = \frac{1}{1-y} + \frac{3y[1-y^{n-1}]}{(1-y)^2} - \frac{(3s-2)y^n}{1-y}$$

= स पदों का योग

५.५ अनन्त श्रेणी (infinite series)—यदि किसी श्रेणी में पदों की पूर्वानुपरता का अन्त किसी निश्चित पद के पश्चात् होता हो तो वह साम्त (finite) श्रेणी कहलाती है। इसके विपरीत यदि श्रेणी में पदों की पूर्वानुपरता असाम (without limit) हो तो वह अनन्त श्रेणी कहलाती है।

क, कन, कन<sup>२</sup>, ..... कन<sup>n</sup>, कन<sup>n+१</sup>, ..... यह अनन्त श्रेणी का उदाहरण है।

५.५१ अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग—क, कन, कन<sup>२</sup> + ..... यह अनन्त श्रेणी है। इसका स पदों तक योग निकालो और जैसे स अनन्ती की ओर प्रवृत्त हो इस योग के आचरण का निरीक्षण करो। स पदों के योग का यह अभिधान करने पर

$$\begin{aligned} \text{योग} &= \frac{k(1-n^n)}{1-n} \\ &= \frac{k}{1-n} - \frac{k n^n}{1-n} \end{aligned}$$

अब जैसे स अनन्ती की ओर प्रवृत्त होता है —

$$स \rightarrow \infty \text{ योस} = स \rightarrow \infty \frac{क}{१-न} - स \rightarrow \infty \frac{सो}{१-न}$$

क्योंकि प्रथम पद में अर्थात्  $\frac{क}{१-न}$  में स नहीं है इस-

लिए स के अनन्ती की ओर प्रवृत्त होने पर भी उसकी अर्धा सदैव  $\frac{क}{१-न}$  के सम ही रहेंगे। किन्तु  $\frac{क}{१-न}$  न<sup>व</sup> इस पद में स, अंश में के न का घात है।

यदि संख्या की दृष्टि से  $n > 1$  तो स जैसे जैसे बढ़ता है अर्थात् जैसे  $स \rightarrow \infty$  न<sup>व</sup> भी बढ़ता जाता है और अन्त में

$$\text{जब } स \rightarrow \infty \text{ तब } \frac{क}{१-न} \text{ न}^{\text{व}} \rightarrow \infty$$

$$\text{अतः } स \rightarrow \infty \text{ योस} = \frac{क}{१-न} - स \rightarrow \infty \frac{कन^{\text{व}}}{१-न}$$

अथवा  $स \rightarrow \infty$  सी योस

$$= [\text{परिमित राशि}] - [\text{अनन्त राशि}] = \text{अनन्त राशि}$$

अतः जिस गुणोत्तर ध्रुवी की साधारण निष्पत्ति संख्या की दृष्टि से 1 अधिक हो उसका अनन्ती तक योग अपरिमित होता है।

यदि  $-1 < n < 1$  अर्थात् संख्या की दृष्टि से  $n < 1$  तो जैसे स बढ़ता है न<sup>व</sup> घटता जाता है।

$$\text{अर्थात् } स \rightarrow \infty \quad \text{न}^{\text{व}} \rightarrow 0$$

अर्थात्  $s \rightarrow \infty, \frac{fn^s}{1-n} \rightarrow 0$  की ओर प्रवृत्त अत्यल्प-  
राशि

$$\text{अतः } \frac{\text{सी}}{s \rightarrow \infty} \text{ योस} = \frac{f}{1-n} - s \rightarrow \infty \frac{f}{1-n} n^s$$

दक्षिण पक्ष का द्वितीय पद सीमा में प्रथम पद की तुलना में नगण्य है।

$$\text{अतः } \frac{\text{सी}}{s \rightarrow \infty} \text{ योस} = \frac{f}{1-n}$$

= परिमित राशि

अतः जिस गुणोत्तर श्रेणी की साधारण निष्पत्ति संख्या की दृष्टि से १ न्यून होती है उसका अनन्ती तक योग परिमित होता है और वह  $\frac{f}{1-n}$  के सम होता है।

उदाहरण—  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  इस श्रेणी का

अनन्ती तक योग निकालो।

दत्त श्रेणी का प्रथम पद १ तथा साधारण निष्पत्ति  $\frac{1}{2}$  है। इसके स पदों का योग

$$\text{योस} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^s}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^s}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{2} - \frac{1}{2 \times 2^{s-1}}$$

अब जैसे  $s \rightarrow \infty$  राशि  $\frac{1}{2 \times 2^{s-1}} \rightarrow 0$

$$\text{अतः } s \rightarrow \infty \text{ योस} = \frac{2}{2} - s \rightarrow \infty \frac{1}{2 \times 2^{s-1}}$$

$$= \frac{2}{2} - (\text{शून्य की ओर प्रवृत्त अत्यल्प राशि})$$

$$= \frac{2}{2}$$

५.६ समान्तर गुणोत्तर श्रेणी का अनन्ती तक योग—  
 $k, (k+x)n, (k+2x)n^2 + \dots$  इस समान्तर गुणोत्तर  
 श्रेणी के स पदों का योग अनुच्छेद ५.५१ में प्राप्त किया  
 गया है।

$$\text{अतः योस} = \frac{k}{1-n} + \frac{xn}{(1-n)^2} - \frac{xn^s}{(1-n)^2} \\ - \frac{[k + (s-1)x]}{1-n} n^s$$

यदि संख्या की दृष्टि से  $n > 1$  तो जैसे जैसे  $s$  बढ़ता

है  $\frac{ख नस}{(१-न)^२}$ , और  $\frac{क + (स-१)ख नस}{१-न}$

अनन्ती की ओर प्रवृत्त होते हैं। अतः इस श्रेणी का अनन्ती तक योग अनन्त होता है।

यदि संख्या की दृष्टि से  $न < १$  तो जैसे  $स \rightarrow \infty$   
 $\frac{ख नस}{(१-न)^२}$  और  $\left[ \frac{क + (स-१)ख}{१-न} \right] नस$  पद प्रथम दो पदों की तुलना में नगण्य होते हैं और अन्त में इनका लोप हो जाता है।

अतः इस दशा में अनन्ती तक योग

$$यो_{\infty} = \frac{क}{१-न} + \frac{ख न}{(१-न)^२}$$

उदाहरण—  $\frac{२}{७} + \frac{४}{७^२} + \frac{६}{७^३} + \frac{८}{७^४} + \dots$  इस

श्रेणी का अनन्ती तक योग निकालो।

$$यो_{\infty} = \frac{२}{७} + \frac{४}{७^२} + \frac{६}{७^३} + \frac{८}{७^४} + \dots \dots \dots (१)$$

दोनों पक्षों को  $\frac{१}{७}$  से गुणा करने पर

$$\frac{यो_{\infty}}{७} = \frac{२}{७^२} + \frac{४}{७^३} + \frac{६}{७^४} + \dots \dots \dots (२)$$

(२) को (१) में से घटाने पर

$$यो_{\infty} - \frac{यो_{\infty}}{७} = \frac{२}{७} + \frac{२}{७^२} + \frac{२}{७^३} + \dots \dots \dots \infty \text{ तक}$$

$$\frac{6}{9} \text{ यो } \infty = \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right]$$

[गुणोत्तर श्रेणी का अनन्ती तक योग करने पर.

$$\text{यो } \infty = \frac{9}{18}$$

५७ आवर्त दशमिक (recurring decimals)—  
 आवर्त-दशमिक गुणोत्तर श्रेणी का अच्छा उदाहरण है।  
 आवर्त दशमिक गुणोत्तर श्रेणी में रहनेवाली राशियों से  
 बनते हैं। एक, दो, तीन अंकों के आवर्त होने के  
 अनुसार इन श्रृंखलाओं की साधारण निष्पत्ति क्रमशः  
 $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$  रहती है। ऐसे दशमिक का  
 सवाही भिन्न श्रेणी का योग करने से प्राप्त होता है।

विद्यार्थियों को यह सात है कि  $\frac{2}{3}$  अनन्त आवर्त  
 दशमिक  $\cdot 6666$  [जिसके लिये  $\frac{2}{3}$  संक्षिप्त रूप है] के  
 सम है।

$$\text{अथ } \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \dots \quad \text{इस}$$

श्रेणी पर विचार करो। इसका स पदों तक योग करने से

$$\text{योग} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3 \times 10^4}$$

अब जैसे जैसे स बढ़ता है वैसे वैसे  $\frac{2}{3 \times 10^8}$  घटता है

और श्रेणी का योग  $\frac{2}{3}$  की अवधि के सन्निकट आता है।

$$\text{अतः जैसे } s \rightarrow \infty \quad \frac{2}{3 \times 10^8} \rightarrow 0$$

$$\therefore \text{योग } s \rightarrow \infty = \frac{2}{3}$$

यह अवधि सामान्य गणित के नियम से प्राप्त अवधि के समान है।

अतः ०.६६६६... अथवा  $\frac{2}{3}$  से अभिहित भिन्न  $\frac{2}{3}$ , अन्य रीति से इस अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के रूप में लिखा जा सकता है—

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \dots \infty$$

इससे यह स्पष्ट है कि किसी भी आवर्त-दशमिक का संघादी भिन्न, उसकी संघादी अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के योग के सम होता है।

उदाहरण— आवर्त-दशमिक .१२३ का संघादी लघुश भिन्न निकालो।

$$\text{अब } .123 = .12323232323 \dots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{10} + \frac{23}{10^2} + \frac{23}{10^3} + \dots \\
&= \frac{1}{10} + \frac{23}{10^2} \left[ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{10} + \frac{23}{10^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\
&= \frac{1}{10} + \frac{23}{10^2} \times \frac{10}{9} \\
&= \frac{1}{10} + \frac{23}{90} \\
&= \frac{61}{90}
\end{aligned}$$

अतः .१२३ का संघादी लघ्वंश भिन्न  $\frac{61}{90}$  है।

५.८ आवर्त-दशमिक का संघादी भिन्न निकालना—

मान लो दत्त आवर्त-दशमिक द है। इस में अनापत्ती अंकों का अभिधान त करता है, और उन की संख्या प है। आवर्ता अंकों का अभिधान थ करता है और उन की संख्या फ है।

अतः द = त थ थ थ.....

दोनों पक्षों को  $10^{प+फ}$  और  $10^प$  से गुणा करने पर  
 $10^{प+फ} \times द = तथ \times थ थ थ.....$  (अ)



और  $10^p \times d = \text{त.थथथ} \dots \dots \dots (आ)$

(अ) में से (आ) को घटाने पर

$$10^p \times d (10^k - 1) = \text{तथ} - \text{त}$$

$$\text{अतः } d = \frac{\text{तथ} - \text{त}}{10^p (10^k - 1)}$$

अतएव आवर्त-दशमिक द का संघादी भिन्न

$$\frac{\text{तथ} - \text{त}}{10^p (10^k - 1)} \text{ है।}$$

अब  $10^k - 1$  में ९, क बार है।

अतः  $10^p (10^k - 1)$  में प शून्यों से अनुगत ९, क बार है।

$\frac{\text{तथ} - \text{त}}{10^p (10^k - 1)}$  के रूप का अवलोकन करने से दस आवर्त-दशमिक का संघादी भिन्न निकालने के लिए नियम बनाया जा सकता है।

अंश प्राप्त करने के लिए अनावर्ती और आवर्ती दशमिकों की पूर्णांक संख्या में से अनावर्ती अंकों की पूर्णांक संख्या घटाई जाती है। हर को प्राप्त करने के लिए अनावर्ती अंकों की संख्या के सम शून्यों से अनुगत आवर्ती अंकों की संख्या के सम ९ लिए जाते हैं।

उदाहरण— १२३ की अर्धा निकालो।

अनावर्त तथा आवर्त अंकों की पूर्णांक संख्या १२३ है।

अनावर्त अंशों की पूर्णांक संख्या १ है।

$$\text{अतः अंश} = १२३ - १ = १२२$$

इसमें दो आवर्त अंक हैं और एक अनावर्त अंक।

$$\therefore \text{हर} = ९९०$$

$\therefore$  उपर्युक्त आवर्त-दशमिक का संवादी लघ्वंश भिन्न

$$= \frac{१२२}{९९०} \text{ अर्थात् } \frac{६१}{४९५}$$

### प्रश्नावलि ६

(१) इन श्रेणियों का स पदों तक योग निकालो—

(क)  $१ + ३य + ५ य^२ + ७ य^३ + \dots\dots\dots$

(ख)  $१ + \frac{२}{२} + \frac{३}{२^२} + \frac{४}{२^३} + \dots\dots\dots$

(ग)  $६ \times ७ + ११ \times ७^२ + १६ \times ७^३ + \dots\dots\dots$

(२) इन श्रेणियों का अनन्ती तक योग निकालो—

(क)  $\sqrt{३} + १ + \frac{१}{\sqrt{३}} + \dots\dots\dots$

(ख)  $३ - १ + \frac{१}{३} - \frac{१}{९} + \dots\dots\dots$

(ग)  $\sqrt{५} + \frac{१}{\sqrt{५}} + \frac{१}{५\sqrt{५}} + \dots\dots\dots$

$$(घ) (\sqrt{2}+1) + 1 + (\sqrt{2}-1) + \dots$$

(३) इन श्रेणियों का अनन्ती तक योग निकालो—

$$(क) \frac{2}{6} + \frac{3}{6^2} + \frac{2}{6^3} + \frac{3}{6^4} + \dots$$

$$(ख) 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots$$

$$(ग) 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{8} + \frac{9}{8} + \dots$$

$$(घ) \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

(४) इन श्रेणियों का योग निकालो—

$$(क) 3+4, 6+24, 9+124, \dots \text{स पदों तक}$$

$$(ख) y+k, y^2+2k, y^3+3k, \dots \text{स पदों तक}$$

[कलकत्ता]

$$(ग) \frac{k}{y} - \frac{k}{y^2}, \frac{k}{y^2} - \frac{k}{y^3}, \dots \infty \text{ तक } y^2 > 1$$

$$(घ) k+x+3k+2x+4k+3x, \dots (2s) \text{ पदों तक}$$

(५) इस श्रृंखला का स पदों तक और यदि संभव हो तो अनन्ती तक योग निकालो—

$$1 + \frac{3}{8} + \frac{9}{64} + \frac{27}{512} + \frac{81}{4096} + \dots$$

(६) यदि स की सय महीनों के लिए किसी धेड़ो के स पदों का योग  $k+x$  हो तो स पद और धेड़ो की

जाति निकालो ।

(७) (क)  $3\frac{1}{2}$  (ख)  $0.5$  (ग)  $2\frac{3}{4}$  के संवादी भिन्न निकालो ।

(८) यदि  $y = 1 + x + x^2 + \dots \infty$  तक  
और  $r = 1 + x + x^2 + \dots \infty$  तक  
जिसमें  $x$  और  $x$  एक से न्यून हैं तो सिद्ध करो कि

$$1 + x + x^2 + \dots \infty \text{ तक} = \frac{y}{y + r - 1}$$

(९) यदि  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  स अनन्त गुणोत्तर श्रृंखलाओं के योग हों जिन के प्रथम पद क्रमशः  $1, 2, 3, \dots$

$\dots$  हैं और साधारण निष्पत्तियाँ क्रमशः  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$\dots \frac{1}{n+1}$  हों तो दिखाओ कि

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = \frac{1}{2}(n+1)$$

[घम्बई]

(१०)  $[3 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times 3^{\frac{1}{16}} \times \dots \text{ अनन्ती तक}]$  की  
अर्ध निकालो ।

## छठा अध्याय

### हरात्मक श्रेढी

(harmonical progression)

६.१ यदि  $\frac{क}{ग} = \frac{क-ख}{ख-ग}$  तो क, ख, ग राशियां हरात्मक श्रेढी में रहती हैं।

यदि किसी श्रेढी की कोई भी तीन अनुगामी राशियां हरात्मक श्रेढी में हों, तो यह हरात्मक श्रेढी कहलाती है।

६.२ हरात्मक श्रेढी में रहने वाली राशियों के व्युत्क्रम (reciprocal) समान्तर श्रेढी में रहते हैं।

अब हरात्मक श्रेढी में रहने वाली क, ख, और ग इन तीन राशियों पर विचार करो।

परिभाषानुसार

$$\frac{क}{ग} = \frac{क-ख}{ख-ग}$$

$$\text{अर्थात् } क (ख-ग) = ग (क-ख)$$

इस समीकार का  $क \times ख \times ग$  से भाजन करने पर

$$\frac{१}{ग} - \frac{१}{ख} = \frac{१}{ख} - \frac{१}{क}$$

किन्तु यह  $\frac{१}{क}, \frac{१}{ख}, \frac{१}{ग}$  के समान्तर श्रेणी में रहने के लिए प्रतिबंध है।

६२१ हरात्मक मध्यक (harmonic mean) — यदि क, म, ख हरात्मक श्रेणी में हों तो म को क और ख के बीच का हरात्मक मध्यक कहते हैं। अथवा

क तथा ख के बीच में म का निवेश करने पर यदि क, म, ख हरात्मक श्रेणी में रहते हों तो म, क और ख के बीच का हरात्मक मध्यक कहलाता है।

६२२ यदि क, म, ख हरात्मक श्रेणी में हों तो म की अर्धा, क तथा ख के पदों में निकालना।

क्योंकि क, म, ख हरात्मक श्रेणी में हैं  
इसलिए

$$\frac{१}{क}, \frac{१}{म}, \frac{१}{ख} \text{ समान्तर श्रेणी में होंगे।}$$

$$\therefore \frac{१}{म} - \frac{१}{क} = \frac{१}{ख} - \frac{१}{म}$$

$$\text{अथवा } \frac{२}{म} = \frac{१}{क} + \frac{१}{ख}$$

$$m = \frac{2 \text{ कख}}{\text{क} + \text{ख}}$$

अतः किन्हीं दो राशियों के बीच का हरात्मक मध्यक उनके दुगुने गुणनफल की, उनका योग से भाजन करने पर प्राप्त होन वाला लब्धिक सम होता है।

६.२३ अनेक हरात्मक मध्यक—यदि क और ख के बीच में  $m_1, m_2, \dots$  और  $m$  का निवेश करने पर क,  $m_1, m_2, \dots, m$ , ख हरात्मक श्रेढी में रहते हों तो  $m_1, m_2, \dots, m$ , क तथा ख के हरात्मक मध्यक कहलाते हैं।

उदाहरण:— ३ तथा २४ के बीच में ६ हरात्मक मध्यक का निवेश करो।

मान लो  $m_1, m_2, \dots, m_6$  अपेक्षित मध्यक हैं। अतः परिभाषानुसार ३,  $m_1, m_2, \dots, m_6, 24$  हरात्मक श्रेढी में होंगे। यह ८ पदों की हरात्मक श्रेढी है।

$\therefore \frac{1}{3}, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_6}, \frac{1}{24}$  ये ८ पद समान्तर श्रेढी

में रहेंगे। इस समान्तर श्रेढी का पहला पद  $\frac{1}{3}$  है और

८वां पद  $\frac{1}{24}$  है। यदि प्रचय च हो तो

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{3} + 7\text{च}$$

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{3} = 7\text{च}$$

$$\text{अथवा } x = -\frac{1}{28}$$

अतः  $\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \frac{1}{m_3}, \dots, \frac{1}{m_n}$  क्रमशः

$$\frac{9}{28}, \frac{6}{28}, \frac{4}{28}, \dots, \frac{2}{28} \text{ हैं।}$$

अतः अपेक्षित मध्यक  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$

क्रमशः  $\frac{28}{9}, 8, \frac{28}{4}, \dots, 14$  हैं।

६.२४ यह ध्यान रखना चाहिए कि हरात्मक श्रेणी में स पदों के योग के लिए कोई सूत्र नहीं है। किसी विशेष दशा में स पदों का योग वास्तविक संकलन से प्राप्त होता है।

६.३ दो धन राशियों बीच समान्तर, गुणोत्तर और हरात्मक मध्यक स्वयं गुणोत्तर श्रेणी में रहते हैं और वे महत्ता के अवरोही (descending) क्रम में होते हैं।

मान लो क और ख के बीच के सा, गा, हा ये क्रमशः समान्तर, गुणोत्तर और हरात्मक मध्यक हैं।

अतः मध्यकों की परिभाषानुसार

$$\text{सा} = \frac{k+x}{2}$$

$$\text{गा} = \sqrt{kx}$$



$$\text{हा} = \frac{2\text{कख}}{\text{क} + \text{ख}}$$

$$\begin{aligned} \text{(अ) सा} \times \text{हा} &= \frac{\text{क} + \text{ख}}{2} \times \frac{2\text{कख}}{\text{क} + \text{ख}} \\ &= \text{कख} \\ &= (\sqrt{\text{कख}})^2 \\ &= \text{गा}^2 \end{aligned}$$

अतः सा, गा, हा गुणोत्तर श्रेणी में हैं और गा, सा तथा हा के बीच का गुणोत्तर मध्यक है।

(आ) (सा - गा) पर विचार करो

$$\begin{aligned} \text{सा} - \text{गा} &= \frac{\text{क} + \text{ख}}{2} - \sqrt{\text{क}}\sqrt{\text{ख}} \\ &= \frac{\text{क} + \text{ख} - 2\sqrt{\text{क}}\sqrt{\text{ख}}}{2} \\ &= \frac{[\sqrt{\text{क}} - \sqrt{\text{ख}}]^2}{2} \end{aligned}$$

क और ख धन राशियां होने के कारण  $\sqrt{\text{क}}$  और  $\sqrt{\text{ख}}$  वास्तविक हैं।

अतः  $(\sqrt{\text{क}} - \sqrt{\text{ख}})$  भी वास्तविक है

अतः  $(\sqrt{\text{क}} - \sqrt{\text{ख}})^2$  सदैव धन रहता है।

$\therefore$  सा  $>$  गा

अर्थात् किन्हीं भी दो राशियों के बीच का समान्तर

मध्यक उनके गुणोत्तर मध्यक से चढ़ा होता है।

अब 'गा', सा और हा के बीच में का गुणोत्तर मध्यक है इसलिये यह सा और हा के बीच में ही होना चाहिए। यह उपपादित किया जा चुका है जिसा  $> गा$

अतः गा  $> हा$ । अर्थात् जिन्हीं दो धन राशियों के बीच के समान्तर, गुणोत्तर तथा हरात्मक मध्यक, महत्ता के अवरोही क्रम में होते हैं।

उदाहरण— यदि य, र, ल, हरात्मक श्रेणी में हों तो य, य-ल, य-र और ल, ल-य, ल-र भी हरात्मक श्रेणी में रहेंगे।

मान लो य, य-ल, य-र हरात्मक श्रेणी में हैं।

हरात्मक श्रेणी की परिभाषानुसार

$$\frac{य}{य-र} = \frac{य-(य-ल)}{य-ल-(य-र)}$$

$$\frac{य}{य-र} = \frac{ल}{र-ल}$$

अर्थात्  $\frac{य}{ल} = \frac{य-र}{र-ल}$

यह य, र, ल के हरात्मक श्रेणी में रहने के लिए प्रतिग्रन्थ है। किन्तु य, र, ल हरात्मक श्रेणी में हैं। अतः यह धारणा कि य, य-ल, य-र हरात्मक श्रेणी में है सत्य है।

इसी प्रकार ल, ल-य, ल-र हरात्मक श्रेणी में है यह भी उपपादित किया जा सकता है।

## प्रश्नावलि ७

- (१) (क)  $\frac{१}{४}$  और  $\frac{१}{३२३}$  के बीच में ४ हरात्मक मध्यकों का निवेश करो ।
- (ख) ४ और २ के बीच में ३ हरात्मक मध्यकों का निवेश करो ।
- (ग) १ और ३० के बीच में ४ हरात्मक मध्यकों का निवेश करो ।
- (घ)  $१\frac{१}{२}$  और  $\frac{६}{२३}$  के बीच में ५ हरात्मक मध्यकों का निवेश करो ।
- (२) किसी हरात्मक श्रेणी में रहने वाले तीन अनुगामी पदों का योग  $\frac{४७}{६०}$  है और प्रथम पद  $\frac{१}{३}$  है । श्रेणी निकालो ।
- (३) जिसका प्रथम पद क है, अन्त पद ग है और जिस के पदों की संख्या स है ऐसी हरात्मक श्रेणी का नवां पद निकालो । [भद्राल
- (४) यदि किसी हरात्मक श्रेणी का  $n$ वां पद  $y$  हो और  $m$ वां पद  $x$  हो तो सिद्ध करो कि  $n$ वां पद  $\frac{t \times y}{n}$  है । [इलाहाबाद

(५) यदि किसी हरात्मक श्रेढी का  $t$ वां पद  $x$  हो और  $y$ वां पद  $z$  हो तो सिद्ध करो कि  $(t+y)$ वां

$\frac{t \times y}{t+y}$  है।

(६) यदि किसी हरात्मक श्रेढी का  $t$ वां,  $y$ वां,  $d$ वां पद क्रमशः  $k$ ,  $x$ ,  $g$  हो तो सिद्ध करो कि

$(y-d)x + (d-t)k + (t-y)g = 0$  [धर्म्यई]

(७) यदि  $r-y$  तथा  $r-l$  के बीच का हरात्मक मध्यक  $2(r-k)$  हो तो सिद्ध करो कि  $(y-k)$ ,  $(r-k)$ ,  $(l-k)$  गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

[इलाहाबाद १८९०]

(८) दो संख्याओं के बीच का हरात्मक मध्यक  $18\frac{1}{2}$  और गुणोत्तर मध्यक  $24$  है। संस्थापन निकालो।

(९) दो संख्याओं का समान्तर मध्यक, उनके गुणोत्तर मध्यक से  $\frac{1}{2}$  अधिक है और गुणोत्तर मध्यक हरात्मक मध्यक से  $\frac{1}{2}$  अधिक है। संस्थापन निकालो।

[कलकत्ता]

(१०) यदि दो संख्याओं के बीच के समान्तर मध्यक  $y_1, y_2$ , हरात्मक मध्यक  $r_1, r_2$  और गुणोत्तर मध्यक  $l_1, l_2$  हों तो दिखाओ कि

$y_1 r_2 = y_2 r_1 = l_1 l_2$ ।

(११) यदि  $k$ , और  $x$ , इन दो संख्याओं के बीच में दो समान्तर मध्यक  $s_1, s_2$ , दो गुणोत्तर, मध्यक

गा<sub>१</sub>, गा<sub>२</sub>, और दो हरात्मक मध्यक हा<sub>१</sub>, हा<sub>२</sub> का निवेश किया जाय तो तो दिखायो कि

$$\frac{\text{गा}_1, \text{गा}_2}{\text{हा}_1, \text{हा}_2} = \frac{\text{सा}_1 + \text{सा}_2}{\text{हा}_1 + \text{हा}_2} \quad [\text{नागपुर १९४५}]$$

(१२) किसी सामान्तर श्रेढी में और किसी हरात्मक श्रेढी में प्रथम पद, अन्त पद और पदों की संख्या एकही है। सिद्ध करो कि एक श्रेढी के आदि से नवें पद का और दूसरा श्रेढी के अन्त से नवें पद का गुणनफल न से स्वतंत्र है।

(१३) यदि त, थ, द, सामान्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{थद}}{\text{तथ} + \text{तद}}, \frac{\text{दत}}{\text{तथ} + \text{थद}}, \frac{\text{तथ}}{\text{दत} + \text{दथ}}$$

हरात्मक श्रेढी में हैं। [नागपुर १९३९]

(१४) यदि क<sub>१</sub> = ख<sub>२</sub> = ग<sub>३</sub> और क, ख, ग गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि य, र, ल हरात्मक श्रेढी में हैं।

(१५) यदि य, र, ल हरात्मक श्रेढी में हों तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\text{य}}{\text{र} + \text{ल} - \text{य}}, \frac{\text{र}}{\text{ल} + \text{य} - \text{र}}, \frac{\text{ल}}{\text{य} + \text{र} - \text{ल}} \quad \text{हरात्मक श्रेढी में हैं।}$$

(१६) यदि क<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, क<sub>३</sub>, क<sub>४</sub>, हरात्मक श्रेढी में हों तो

$$\text{सिद्ध करो कि } \frac{-\text{क}_1}{\text{क}_2 + \text{क}_3 + \text{क}_4}, \frac{\text{क}_4}{\text{क}_1 + \text{क}_2 + \text{क}_3},$$

$\frac{क_3}{क_1 + क_2 + क_3}, \frac{क_4}{क_1 + क_2 + क_3}$  हरात्मक श्रेढी में हैं।

(१७) यदि क, ख, ग समान्तर श्रेढी में हों, य, र, ल हरात्मक श्रेढी में हों और यदि  $\frac{य}{ल} + \frac{ल}{य} = \frac{क}{ग} + \frac{ग}{क}$  तो सिद्ध करो कि कय, खर, गल गुणोत्तर श्रेढी में हैं।  
[कलकत्ता]

(१८) यदि य, र, ल क्रमशः कग, कख, कख, खग, खग, गक क बीच के गुणोत्तर मध्यक हों तो सिद्ध करो कि यदि क, ख, ग समान्तर श्रेढी में हों तो य<sup>२</sup>, र<sup>२</sup>, ल<sup>२</sup> भी समान्तर श्रेढी में होंगे और र+ल, ल+य, य+र हरात्मक श्रेढी में होंगे [मद्रास १८९०]

६.५ प्राकृतिक संख्याएं (natural numbers) — १, २, ३, ..... स ..... ये प्राकृतिक संख्याएं कहलाती हैं।

६.५१ प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं का योग निकालना। १, २, ३, ४, ..... स ये संख्याएं समान्तर श्रेढी में हैं जिसमें प्रचय १ है। अतः इन सव संख्याओं का योग, इस समान्तर श्रेढी के स पदों के योग के सम है।

$$\text{अतः योग} = \frac{स}{२} [२ + (स - १)१]$$

$$= \frac{s}{2}(s+1)$$

अतः प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं का योग  $\frac{s(s+1)}{2}$  के सम है

६.५२ प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग निकालना—

यदि अपेक्षित योग का योग से अभिधान किया जाय तो

$$\text{योग} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + s^2$$

$$\text{अथ } s^3 - (s-1)^3 = 3s^2 - 3s + 1$$

इस ऐकात्म्य में स की १ और उससे आगे की अर्धा-ओं का आदेश करने से

$$1^3 - 0^3 = 3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1$$

.....

.....

.....

$$(s-2)^3 - (s-3)^3 = 3(s-2)^2 - 3(s-2) + 1$$

$$(s-1)^3 - (s-2)^3 = 3(s-1)^2 - 3(s-1) + 1$$

$$s^3 - (s-1)^3 = 3s^2 - 3s + 1$$

इन समीकरणों का स्तम्भानुसार योग करने से

$$s^3 = 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + s^2] - 3[1 + 2 + 3 + \dots + s] + s$$

$$= 3योष्ठ - 3 \frac{s(s+1)}{2} + s$$

$$\therefore 3योष्ठ = s^3 + \frac{3s(s+1)}{2} - s$$

$$= s(s+1) \left( s-1 + \frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{s(s+1)(2s+1)}{2}$$

$$\therefore योष्ठ = \frac{s(s+1)(2s+1)}{6}$$

६.५३ प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग निकालना—यदि अपक्षित योग का योष्ठ से अभिधान किया जाय तो

$$योष्ठ = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + s^3$$

अब यह ज्ञात है कि

$$s^3 - (s-1)^3 = 3s^2 - 3s^2 + 3s - 1$$

$$(s-1)^3 - (s-2)^3 = 3(s-1)^2 - 3(s-1)^2 + 3(s-1) - 1$$

$$(s-2)^3 - (s-3)^3 = 3(s-2)^2 - 3(s-2)^2 + 3(s-2) - 1$$



$$3^x - 2^x = 4 \times 3^3 - 6 \times 3^2 + 4 \times 3 - 1$$

$$2^x - 1^x = 4 \times 2^3 - 6 \times 2^2 + 4 \times 2 - 1$$

$$1^x - 0^x = 4 \times 1^3 - 6 \times 1^2 + 4 \times 1 - 1$$

इन सब ऐकात्म्यों के वाम पक्षों का स्तम्भानुसार योग  
 $\equiv$  उनके दक्षिण पक्षों का स्तम्भानुसार योग

$$\therefore s^x = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + s^3) \\ - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + s^2) \\ + 4(1 + 2 + 3 + \dots + s) - s$$

$$s^x = 4योष्ठ - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + s^2) \\ + 4(1 + 2 + 3 + \dots + s) - s$$

$$= 4योष्ठ - 6 \frac{s(s+1)(2s+1)}{6} + \frac{4s(s+1)}{2} - s$$

$$\therefore 4योष्ठ = s^x + s + s(s+1)(2s+1) - 2s(s+1) \\ = s(s+1)[s^2 - s + 1 + 2s + 1 - 2] \\ = s(s+1)(s^2 + s)$$

$$\therefore योष्ठ = \frac{s^2(s+1)}{4} \\ = \frac{[s^2(s+1)]^2}{2}$$

अतः प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग प्रथम स प्राकृतिक संख्याओं के योग का घन होता है।

६.६ य संकेतना [ $\Sigma$  notation]— किसी भी श्रेणी का सामान्य पद उसी पद की संख्या का धित होता है। अतः यह पद और पद-संख्या ज्ञात हो तो श्रेणी इस रूप में लिखी जा सकती है—

उदाहरण—

$$(1) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^n k$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 3^n} \\ = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \times 3^{k-1}}$$

$$(3) \quad k + (k + c) + (k + 2c) + \dots + k + (n-1)c \\ + (k + nc) = \sum_{k=1}^n [k + (n-1)c]$$

य संकेतना दत्त श्रेणी के सामान्य पद के पहल रूपों जानी है और यह सामान्य पद से दिखाए गए प्ररूप पदों के योग का काम दती है।

सुतथ्यता के लिए योग करण आरम्भ करने वाले पद की

संख्या संकेतना के नीचे और योग वर्ण के अन्तिम पद की संख्या संकेतना के ऊपर रखी जाती है।

$$x=y$$

अतः  $y^x$  का निर्वचन (interpretation) इस प्रकार है—

$$x=1$$

$y^x$  रूप वाले सामान्य पद में  $y$  को १ से स तक अर्थात् देने पर प्राप्त होने वाली श्रेणी का योग निकालना अभीष्ट है।

६.७ कुछ साधित उदाहरण—

उदाहरण १—  $k, k + c, k + 2c, \dots$  इस श्रेणी के प्रथम  $n$  पदों के वर्गों का योग निकालो।

अपेक्षित योग का  $y$  से अभिव्यक्त करने पर योग लिखो समता में दक्षिण पक्ष की भर्ती जात करनी है।

$$y = k^2 + (k + c)^2 + (k + 2c)^2 + \dots [k + (n-1)c]^2$$

इस श्रेणी के सामान्य पद पर विचार करो।

$$\begin{aligned} \text{सामान्य पद } p_x &= [k + (x-1)c]^2 \\ &= k^2 + c^2 (x-1)^2 + 2k \times c(x-1) \end{aligned}$$

$\therefore$  अपेक्षित योग

$$x=n$$

$$y = y^x$$

$$x=1$$

$$x=y$$

$$= y [k + (x-1)c]^2$$

$$x=1$$

$$\begin{aligned}
&= \underset{\substack{\text{घ=म} \\ \text{६=१}}}{\text{य}} [\underset{\substack{\text{क=१} \\ \text{६=१}}}{\text{क}^2} + \underset{\substack{\text{च=१} \\ \text{६=१}}}{\text{च}^2} (\underset{\substack{\text{घ=म} \\ \text{६=१}}}{\text{घ}} - 1)^2 + 2\underset{\substack{\text{क=१} \\ \text{६=१}}}{\text{क}} \underset{\substack{\text{च=१} \\ \text{६=१}}}{\text{च}} (\underset{\substack{\text{घ=म} \\ \text{६=१}}}{\text{घ}} - 1)] \\
&= \underset{\substack{\text{क=१} \\ \text{६=१}}}{\text{य}} \underset{\substack{\text{क=१} \\ \text{६=१}}}{\text{क}^2} + \underset{\substack{\text{च=१} \\ \text{६=१}}}{\text{च}^2} \underset{\substack{\text{घ=म} \\ \text{६=१}}}{\text{य}} (\underset{\substack{\text{घ=म} \\ \text{६=१}}}{\text{घ}} - 1)^2 \\
&\quad + 2\underset{\substack{\text{क=१} \\ \text{६=१}}}{\text{क}} \underset{\substack{\text{च=१} \\ \text{६=१}}}{\text{च}} \times \underset{\substack{\text{घ=म} \\ \text{६=१}}}{\text{य}} (\underset{\substack{\text{घ=म} \\ \text{६=१}}}{\text{घ}} - 1) \\
&= \underset{\substack{\text{क=१} \\ \text{६=१}}}{\text{सक}^2} + \underset{\substack{\text{च=१} \\ \text{६=१}}}{\text{च}^2} \frac{\text{स}(\text{स}-1)(2\text{स}-1)}{6} \\
&\quad + 2\underset{\substack{\text{क=१} \\ \text{६=१}}}{\text{क}} \underset{\substack{\text{च=१} \\ \text{६=१}}}{\text{च}} \frac{\text{स}(\text{स}-1)}{2} \\
&= \underset{\substack{\text{क=१} \\ \text{६=१}}}{\text{सक}^2} + \underset{\substack{\text{च=१} \\ \text{६=१}}}{\text{च}^2} \frac{\text{स}(\text{स}-1)(2\text{स}-1)}{6} \\
&\quad + \underset{\substack{\text{क=१} \\ \text{६=१}}}{\text{क}} \underset{\substack{\text{च=१} \\ \text{६=१}}}{\text{च}} \text{स}(\text{स}-1)
\end{aligned}$$

उदाहरण २—  $1 \times 3 \times 5 + 2 \times 4 \times 6 + 3 \times 7 \times 8 + \dots$

इस श्रेणी के स पदों का योग निकालो।

इस श्रेणी का स<sup>वा</sup> पद  $\text{स}(2\text{स}+1)(3\text{स}+2)$  के सम है। यह पदों का अध्ययन करने पर सरलता से प्राप्त हो जायगा।

$$\therefore \text{पस} = 6 \times \text{स}^3 + 10 \times \text{स}^2 + 2\text{स}$$

स को १ तथा १ से स तक अर्थात् देने पर

$$\text{पस} = 6 \times 1^3 + 10 \times 1^2 + 2 \times 1$$

$$p_1 = 6 \times 2^3 + 7 \times 2^2 + 2 \times 2$$

.....

.....

.....

$$p_s = 6 \times s^3 + 7 \times s^2 + 2 \times s$$

इन समीकारों के दोनों पक्षों का योग करने से

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_s$$

$$= 6(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + s^3)$$

$$+ 7(1^2 + 2^2 + \dots + s^2)$$

$$+ 2[1 + 2 + 3 + \dots + s]$$

$$\text{यो} = 6 \left[ \frac{(s)(s+1)}{2} \right]^2 + 7 \frac{s(s+1)(2s+1)}{6}$$

$$+ \frac{2s(s+1)}{2}$$

$$= \frac{3}{2}(s^2 + s)^2 + \frac{7}{6}[s(s+1)(2s+1)]$$

$$+ s(s+1)$$

$$= \frac{s(s+1)}{6} [9s^2 + 9s + 13s + 7 + 6]$$

$$= \frac{s(s+1)(9s^2 + 22s + 13)}{6}$$

उदाहरण ३—

५ + ५५ + ५५५ + ..... इस श्रेणी के स पदों का

योग निकाला।

अपेक्षित योग का यो से अभिव्यक्ति करने पर

$$\begin{aligned} \text{यो} &= 5 + 5^2 + 5^3 + \dots \text{स पदों तक} \\ &= 5 [1 + 5 + 5^2 + \dots \text{स पदों तक}] \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का ९ से गुणन करने पर

$$\begin{aligned} 9 \text{ यो} &= 5 [9 + 9^2 + 9^3 + \dots \text{स पदों तक}] \\ &= 5 [(10^1 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) \\ &\quad + \dots \text{स पदों तक}] \\ &= 5 [10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{\text{स}} - \text{स}] \\ &= 5 \times \frac{10(10^{\text{स}} - 1)}{9} = 5 \text{ स} \\ &= \frac{50}{9} (10^{\text{स}} - 1) - 5 \text{ स} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{यो} = \frac{50}{9} (10^{\text{स}} - 1) - \frac{5 \text{ स}}{9}$$

$$\text{अतः अपेक्षित योग} \frac{50(10^{\text{स}} - 1)}{9} - \frac{5 \text{ स}}{9} \text{ है।}$$

उदाहरण ४—

$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \dots$  इस  
श्रेणी का स अभिव्यक्ति तक योग निकालो।

दस श्रेणी का घ<sup>३</sup> पद

$$\text{घ} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \text{घ}^2$$

$$= \frac{\text{घ} (\text{घ} + 1) (2 \text{ घ} + 1)}{6}$$

$$\therefore \text{अर्थात् पघ} = \frac{1}{6} [2 \text{ घ}^3 + 3 \text{ घ}^2 + \text{घ}]$$

$\therefore$  अपेक्षित योग

$$\text{यो} = \text{य पघ}$$

$$= \text{य} \frac{1}{6} [2 \text{ घ}^3 + 3 \text{ घ}^2 + \text{घ}]$$

$$= \text{य} \frac{1}{3} \text{ घ}^3 + \text{य} \frac{1}{2} \text{ घ}^2 + \text{य} \frac{1}{6} \text{ घ}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ य घ}^3 + \frac{1}{2} \text{ य घ}^2 + \frac{1}{6} \text{ य घ}$$

$$= \frac{1}{3} \left[ \frac{\text{स} (\text{स} + 1)}{2} \right]^3 + \frac{1}{2} \frac{\text{स} (\text{स} + 1) (2 \text{ स} + 1)}{6} + \frac{1}{6} \frac{\text{स} (\text{स} + 1)}{2}$$

$$= \frac{\text{स}^3 (\text{स} + 1)^3}{12} + \frac{\text{स} (\text{स} + 1) (2 \text{ स} + 1)}{12} + \frac{\text{स} (\text{स} + 1)}{12}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s(s+1)}{12} [s(s+1) + (2s+1) + 1] \\
&= \frac{s(s+1)}{12} (s^2 + 3s + 2) \\
&= \frac{s(s+1)(s+1)(s+2)}{12} \\
&= \frac{s(s+1)^2(s+2)}{12}
\end{aligned}$$

### प्रश्नावलि ८

(१) इन श्रेणियों के स पदों का योग निकालो—

(क)  $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \dots$

(ख)  $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots$

(ग)  $4 \times 1^2 + 6 \times 2^2 + 8 \times 3^2 + \dots$

(घ)  $2 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 3^2 + \dots$

(च)  $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots$

(छ)  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots$

(ज)  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots$

(२) यह दिखाओ कि आवश्यक रूप से १ से प्रारंभ न होने-  
वाले अनुगामी पूर्णांकों की किसी संख्या के घनों  
का योग, पूर्णांकों के योग से भाज्य है।



(३) इन श्रेणियों में सगं पद और स पदों का योग निकालो।

(क)  $2+4+10+17+.....$  [फलकत्ता

(ख)  $2+7+18+23+.....$  [बम्बई

(ग)  $2+6+18+30+.....$  [फलकत्ता

(४) यदि  $यो_1 = 1+2+3+...+स$  और

$यो_2 = 1^2+2^2+3^2+...+स^2$  तो दिखाओ

कि  $३यो_1 + ३यो_2 + (स+१) = (स+१)^3$

[फलकत्ता

(५) इन श्रेणियों के स पदों का योग निकालो—

(फ)  $१ \times २ + २ \times ३ + ३ \times ४ + .....$

(ख)  $२ \times ३ + ३ \times ५ + ४ \times ७ + ....$

(ग)  $१ \times ३ \times ४ + २ \times ५ \times ७ + ३ \times ७ \times १० + ...$

(घ)  $१ \times १ + २(१+२) + ३(१+२+३) + ...$

(ङ)  $१^२ \times ३ + २^२ \times ४ + ३^२ \times ५ + ...$

(च)  $१^२ + (१^२+३^२) + (१^२+३^२+५^२) + ...$

(छ)  $(१^२+३^२) + (१^२+३^२+५^२+७^२) + (१^२+३^२+५^२+७^२+९^२+११^२) + ...$

(ज)  $\frac{१^३}{१} + \frac{१^३+२^३}{२} + \frac{१^३+२^३+३^३}{३} + .....$

(झ)  $(स-१)१ + (स-२)२ + (स-३)३ + ...$

(ञ)  $१ \times स^२ + २(स-१)^२ + ३(स-२)^२ + ..... + स(१)^२$

(६) इन श्रेणियों का स पदोंतक योग निकालो—

(क)  $९ + ९९ + ९९९ + \dots$

(ख)  $३ + ३३ + ३३३ + \dots$

(ग)  $६ + ६६ + ६६६ + \dots$

## सातवां अध्याय

### द्विघात समीकार

(quadratic equation)

७.१ एक अघात राशि के समीकार में यदि अघात का उच्चतम घात दो हो तो उस समीकार को उस अघात का द्विघात-समीकार कहते हैं।

उदाहरणार्थ  $कय^२ + खय + ग = ०$  यह, अघात  $य$  का द्विघात-समीकार है जिसमें  $क$ ,  $ख$ ,  $ग$  ये अचल हैं।  $य$  स्वतन्त्र पद  $ग$ , समीकार का अचल पद कहलाता है।

७.१२ द्विघात-समीकार का साधन— मान लो दत्त द्विघात-समीकार  $क.य^२ + खय + ग = ०$  है, जिसमें  $क$ ,  $ख$ ,  $ग$  घात राशियां हैं।

दत्त समीकार का  $य^२$  के गुणक  $क$  से आदि से अन्त तक भाजन करने पर समीकार का रूपान्तर

$$य^२ + \frac{ख}{क}य + \frac{ग}{क} = ० \text{ में होता है।}$$

अब चाम पक्ष में  $\frac{ख^2}{४क^2}$  अर्थात् य के आधे गुणक का घर्ग जोड़ो और घटाओ । उपयुक्त व्यवस्थापन करने से यह फल प्राप्त होता है ।

$$\left(y + \frac{ख}{२क}\right)^2 = \frac{ख^2 - ४कग}{४क^2}$$

$$\therefore y + \frac{ख}{२क} = \pm \frac{\sqrt{ख^2 - ४कग}}{\sqrt{४क^2}}$$

[घर्गमूल निस्सारण करने पर  
अथवा  $y = \frac{-ख \pm \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क}$  [  $\frac{ख}{२क}$  का पक्षान्तरण करने पर

क, ख, ग के पदों में व्यक्त, य की इन दो अर्थाओं से वृत्त समीकार का समाधान जाना है । ये समीकार के मूल कहलाते हैं ।

७.२ साध— किसी भी द्विघात समीकार के दो से अधिक मूल नहीं होते ।

पिछले अनुच्छेद में यह देखा जा चुका है कि

$कय^२ + खय + ग = ०$  के समान द्विघात समीकार का समाधान करने वाले दो मूल प्राप्त होते हैं ।

यदि संभव हो तो मान ला कि द्विघात समीकार

$कय^२ + खय + ग = ०$  के तीन भिन्न मूल अ, आ और इ हैं ।

प्रत्येक मूल से समीकार का समाधान होना चाहिए  
इसलिये

$$क अ^2 + ख अ + ग = 0 \dots\dots\dots (१)$$

$$क आ^2 + ख आ + ग = 0 \dots\dots\dots (२)$$

$$क इ^2 + ख इ + ग = 0 \dots\dots\dots (३)$$

(१) में से (२) घटाने पर

$$क(अ^2 - आ^2) + ख(अ - आ) = 0$$

(अ - आ) से इसका भाजन करो, जो अ  $\neq$  आ के कारण उपकल्पनानुसार शून्य नहीं है।

$$\therefore क(अ + आ) + ख = 0 \dots\dots\dots (४)$$

इसी प्रकार (२) तथा (३) से

$$क(आ + इ) + ख = 0 \dots\dots\dots (५)$$

प्राप्त होगा अथ (५) को (४) में से घटाने पर

$$क(अ - इ) = 0 \dots\dots\dots (६)$$

अथ (६) जैसी दशा क लिये क = 0 अथवा अ - इ = 0 अर्थात् अ = इ होना चाहिए। ये दोनों फल उपकल्पना के विरुद्ध हैं क्योंकि क = 0 होने से समीकार के घात का प्र.सन होता है और अ  $\neq$  इ।

अतः 'द्विघात-समीकार के तीन मूल हैं' यह कल्पना असंगत है।

अतः द्विघात-समीकार के दो से अधिक मूल नहीं हो सकते।

उदाहरण १—  $य^2 - य - ६ = 0$  का साधन करो।

$$\text{यहां } क = १, ख = -१, ग = -६$$

$$\text{अतः } \frac{१ + \sqrt{१ + २४}}{२}, \frac{१ - \sqrt{१ + २४}}{२}$$

ये दो अर्थों हैं।

$$\therefore y = 3 \text{ अथवा } -2$$

उदाहरण २—  $2y^2 - 3y - 3 = 0$  इस द्विघात समीकार का साधन करो।

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 24}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

७.२१ द्विघात-समीकार के मूलों का पर्गलोन्नत—  
अ तथा आ से द्विघात समीकार  $कx^2 + खx + ग = 0$  के मूलों का अभिधान करने पर

$$अ = \frac{-ख + \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क}$$

$$आ = \frac{-ख - \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क} \text{ यह लिखा जा सकता है}$$

वरणी चिह्न के नीचे की राशि  $(ख^2 - ४कग)$  का धिचार करन पर ये दशापं संभव हैं।

(१) यदि  $(ख^2 - ४कग)$  यह राशि धन हो तो इसका वर्गमूल निकाला जा सकता है।

(२) यदि  $(ख^2 - ४कग)$  पूर्ण वर्ग हो तो समीकार के मूल वास्तविक, परिमेय और भिन्न होंगे।

(३) यदि  $(ख^2 - ४कग)$  धन राशि हो परन्तु पूर्ण वर्ग

न हो तो समीकार के मूल वास्तविक, अपरिमेय और भिन्न होंगे।

(२) यदि  $x^2 - ४कग = ०$  तो प्रत्येक मूल  $= \frac{x}{२क}$  के सम होगा। अतः इस दशा में मूल वास्तविक और समान होंगे।

(३) यदि  $x^2 - ४कग$  ऋण हों तो इसका वर्गमूल काव्य-निक होगा। इस दशा में दोनों मूल संकर अथवा काव्यनिक होंगे।

इन फलों का सारांश यह है—

$x^2 \geq ४कग$  के अनुसार  $x^2 - ४कग$  धन, शून्य अथवा

ऋण होगा।

अतः यदि  $x^2 > ४कग$ , तो मूल वास्तविक और असम होंगे।

यदि  $x^2 = ४कग$  तो मूल वास्तविक और समान होंगे।

यदि  $x^2 < ४कग$  तो मूल काव्यनिक अथवा संकर होंगे।

इन परीक्षाओं से, समीकार का साधन किए बिना मूलों के स्वरूप का निश्चय किया जा सकता है। अतः  $(x^2 - ४कग)$  को द्विघात-समीकार का विवेचक (discriminant) कहते हैं।

आलोक— विद्यार्थियों को यह ध्यानपूर्वक समझना चाहिए कि परिमेय और वास्तविक गुणकों वाले द्विघात

में अपरिमेय अथवा संकर मूल युग्मों में आते हैं।

उदाहरण १—दिखाओ कि समीकार  $२x^2 - ३x + ५ = ०$ ।

समाधान  $x$  की वास्तविक अर्धों से नहीं होता।

दत्त समीकार में  $k = २$ ,  $x = -३$ ,  $g = ५$

$$\text{अतः } x^2 - ४कग = ९ - ४ \times २ \times ५$$

$$= -३१$$

क्योंकि विवेचक ऋण है इसलिए समीकार के मूल संकर हैं। अतएव  $x$  की वास्तविक अर्धों से समीकार का समाधान नहीं होता।

७.३ द्विघात-समीकार के मूलों तथा गुणकों में सम्बन्ध—  
यदि  $अ$  तथा  $आ$   $kx^2 + खx + ग = ०$  के मूल हों तो

$$अ = \frac{-ख + \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क} \dots\dots\dots(१)$$

$$आ = \frac{-ख - \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क} \dots\dots\dots(२)$$

(१) और (२) का योग करने से

$$\begin{aligned} अ + आ &= \frac{-ख + \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क} + \frac{-ख - \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क} \\ &= \frac{-ख + \sqrt{ख^2 - ४कग} - ख - \sqrt{ख^2 - ४कग}}{२क} \\ &= \frac{-२ख}{२क} \end{aligned}$$



$$= -\frac{x}{k}$$

(१) और (२) का गुणन करने से

$$\begin{aligned} y \times z &= \left[ \frac{-x + \sqrt{x^2 - 4kg}}{2k} \right] \\ &\quad \times \left[ \frac{-x - \sqrt{x^2 - 4kg}}{2k} \right] \\ &= \frac{x^2}{4k^2} - \frac{x^2 - 4kg}{4k^2} \\ &= \frac{x^2}{4k^2} - \frac{x^2}{4k^2} + \frac{4kg}{4k^2} \\ &= \frac{g}{k} \end{aligned}$$

$$\text{अतः मूलों का योग} = -\frac{x}{k}$$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \frac{g}{k}$$

७.३१ मन्थया (eliter) यदि  $y$  तथा  $z$  समीकार के मूल हों तो  $(y - m)$  और  $(y - mz)$  दो समीकार में धामपक्ष के शण्ट होन चाहिये। मर्यात्  $(y - m)$   $(y - mz)$  के गुणनफल को धृत्प के सम करने से जो समीकार प्राप्त होगा यद् दस समीकार के समान होना चाहिये।

$$m^2 (y - m) (y - mz) = 0$$

अथवा  $y^2 - (अ + भा) y + अ \times भा = 0 \dots\dots\dots(१)$   
 किन्तु दत्त समीकार  $क y^2 + ख y + ग = ०$ , क से भाजन  
 करने पर इस प्रकार लिखा जा सकता है —

$$y^2 + \frac{ख}{क} y + \frac{ग}{क} = 0 \dots\dots\dots(२)$$

समीकार (१) और (२) सर्वांग सम हैं।

दोनों में  $y^2$  के गुणक समान हैं इसलिए दोनों में संघाती  
 पदों के गुणक भी समान होना चाहिये।

$$\text{अतः } अ + भा = - \frac{ख}{क}$$

$$अ \times भा = \frac{ग}{क}$$

जो फल पहिले ही प्राप्त किए गए हैं।

अतः यदि द्विघात समीकार में  $y^2$  का गुणक एक हो तो —

(१) मूलों का योग  $y$  के गुणक के सम किन्तु विपरीत  
 चिह्न का होता है।

और (२) मूलों का गुणनफल समीकार के अचल पद के  
 सम होता है।

७.४ दत्त मूलों से समीकार बनाना—

मान लो अपेक्षित समीकार क मूल अ तथा भा हैं।

अतः  $y = अ$  और  $y = भा$ , इन अर्थांशों से अपेक्षित  
 समीकार का समाधान होगा।

अर्थात् समीकार के चार पक्ष को पदसंहति में  $(y - अ)$

और (य - अ) खण्ड हैं ।

अथवा समीकार का रूप

$$(य - अ) (य - आ) = 0 \text{ होगा ।}$$

$$\text{अथवा } य^2 - (अ + आ) य + अ \times आ = 0$$

अतः जिस समीकार के मूल दिए हों उसका रूप यह होता है—

$$य^2 - (\text{मूलों का योग}) य + (\text{मूलों का गुणनफल}) = 0$$

अब जिसके मूल दिए गए हों वह समीकार बनाया जा सकता है ।

उदाहरण १—ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल २ तथा  $-\frac{1}{2}$  हों ।

$$\text{अपेक्षित समीकार } (य - २) (य + \frac{1}{2}) = 0 \text{ है ।}$$

$$य^2 - \frac{3}{2} य - १ = 0$$

$$\text{अथवा } २य^2 - ३य - २ = 0$$

अथवा समीकार इस रीति से भी प्राप्त किया जा सकता है ।

$$\text{मूलों का योग} = २ - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = २ (-\frac{1}{2}) = -१$$

∴ अपेक्षित समीकार

$$y^2 - \frac{3}{2}y - 1 = 0$$

अथवा  $2y^2 - 3y - 2 = 0$  है।

यदि मूल अपरिमेय अथवा संकर हों तो दूसरी पद्धति अधिक उपयोगी होती है।

उदाहरण २— ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल  $2 + \sqrt{3}$  और  $2 - \sqrt{3}$  हों।

$$\begin{aligned}\text{मूलों का योग} &= 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{मूलों का गुणनफल} &= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \\ &= 4 - 3 \\ &= 1\end{aligned}$$

∴  $y^2 - 4y + 1 = 0$  यह अपेक्षित समीकार है।

उदाहरण ३— ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल  $-2 \pm 3i$  हों।

$$\begin{aligned}\text{मूलों का योग} &= [-2 + 3i] + [-2 - 3i] \\ &= -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{मूलों का गुणनफल} &= (-2 + 3i)(-2 - 3i) \\ &= 4 - 9i^2 \\ &= 4 + 9 \quad [\because i^2 = -1] \\ &= 13\end{aligned}$$

अतः  $y^2 + 4y + 13 = 0$  यह अपेक्षित समीकार है।

७.५ एक के घनमूल (cube roots of unity)—  
मान लो य एक का घनमूल है।

$$\therefore y = \sqrt[3]{1}$$

$$\text{अथवा } y^3 = 1$$

अतः  $y^3 - 1 = 0$  इस समीकार का साधन करना है।

$$\therefore (y-1)(y^2+y+1) = 0$$

$$\therefore y-1=0, \text{ अर्थात् } y=1$$

$$\text{अथवा } y^2+y+1=0$$

$$\text{अर्थात् } y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\text{अतः एक के घनमूल } 1, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ हैं}$$

प्रत्यक्ष घात क्रिया (actual involution) से यहां दिखाया जा सकता है कि इनमें से प्रत्येक अर्धा घनित (cubed) करने पर एक क सम है। अतः एक के तीन घनमूल होते हैं जिनमें एक वास्तविक और दो संकर होते हैं।

यदि एक के काल्पनिक मूलों का अ तथा आ से अभिधान किया जाय तो अ तथा आ,  $y^2+y+1=0$  इस द्विघात समीकार के मूल होंगे।

$$अ \times आ = 1 \dots\dots\dots (1)$$

(1) के दोनों पक्षों को  $अ^2$  से गुणा करो।

$$\therefore अ^3 \times आ = अ^2$$

किन्तु अ एक का घनमूल है, इसलिये

$$\therefore a^3 = 1$$

$$\therefore a = a^4 \dots \dots \dots (2)$$

इसी प्रकार यह दिखया जा सकता है कि

$$a = a^4 \dots \dots \dots (3)$$

(2) और (3) से यह ज्ञात होता है कि अ और 'आ' एक दूसरे के वर्ग हैं। अतः एक क संकर घनमूल इस प्रकार का है कि ये एक दूसरे के वर्ग होते हैं। यह रुढ़ि है कि एक के घनमूलों का अभिधान १, ओ तथा ओ<sup>२</sup> से किया जाय।

फर्शोंकि  $y^3 + y + 1 = 0$  इस समीकार का समाधान ओ से होता है, इसलिये

$$ओ^3 + ओ + 1 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

समीकार (४) यह बतलाना है कि एक के तीनों घनमूलों का योग शून्य के सम होता है।

पुनः ओ तथा ओ<sup>२</sup>

$$y^3 + y + 1 = 0 \text{ के मूल हैं}$$

$$\therefore ओ \times ओ^2 = 1$$

$$\text{अथवा } ओ^3 = 1$$

अतः ये फल प्राप्त होते हैं—

(१) एक के दोनों संकर घनमूलों का गुणनफल एक के सम होता है।

(२) ओ<sup>३</sup> का प्रत्यक्ष पूर्णांक घात एक के सम होता है।

७.५१ यह जानना आवश्यक है कि ओ के उत्तरोत्तर

घन पूर्णांक घात १, ओ अथवा ओ<sup>२</sup> होते हैं।

पर्यन्त यदि स ३ का अपवर्त्य (multiple) हो तो उसे ३ घ इस रूप का होना चाहिए जहां घ घन पूर्णांक है।

$$\therefore [\text{ओ}]^{\text{स}} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}} = [\text{ओ}^3]^{\text{घ}} \\ = १$$

रिदि स ३ का अपवर्त्य न हो तो उसे ३घ+१ अथवा ३घ+२ के सम हाना चाहिए।

यदि स = ३घ+१ तो

$$(\text{ओ})^{\text{स}} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}+१} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}} \times \text{ओ} \\ = \text{ओ}$$

और यदि स = ३घ+२ तो

$$[\text{ओ}]^{\text{स}} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}+२} = [\text{ओ}]^{3\text{घ}} \times \text{ओ}^२ \\ = \text{ओ}^२$$

उदाहरण १—  $\text{क}^३ + \text{ख}^३$  का रेखीय खण्डीकरण करो।

$$\text{क}^३ + \text{ख}^३ = (\text{क} + \text{ख}) (\text{क}^२ - \text{कख} + \text{ख}^२)$$

$$= (\text{क} + \text{ख}) [\text{क}^२ + (\text{ओ} + \text{ओ}^२) \text{कख} + \text{ओ}^२ \text{ख}^२]$$

$$[\because \text{ओ} + \text{ओ}^२ = -१ \text{ और } \text{ओ}^३ = १]$$

$$= (\text{क} + \text{ख}) (\text{क} + \text{ओ ख}) (\text{क} + \text{ओ}^२ \text{ख})$$

$$\therefore \text{क}^३ + \text{ख}^३ = (\text{क} + \text{ख}) (\text{क} + \text{ओ ख}) (\text{क} + \text{ओ}^२ \text{ख})$$

उदाहरण २— यदि १, ओ, ओ<sup>२</sup> एक के तीन घनमूल हों तो दिखाओ कि

$$[१ + \text{ओ}^२]^३ = -१$$

$$\begin{aligned}
 \text{अथ } (1 + ओ^2)^3 &= 1 + ओ^2 + 3ओ^2 (1 + ओ^2) \\
 &= 1 + ओ^2 + 3ओ^2 + 3ओ^4 \\
 &= 1 + 1 + 3ओ^2 + 3ओ^4 \\
 &\quad [\because ओ^2 = 1] \\
 &= 2 + 3 (ओ^2 + ओ^4) \\
 &= 2 + 3 (-1) \\
 &\quad [\because ओ + ओ^2 + 1 = 0] \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

अन्यथा इसका साधन इस प्रकार किया जा सकता है।

$$\begin{aligned}
 1 + ओ + ओ^2 &= 0 \\
 1 + ओ^2 &= -ओ \\
 \text{अतः } (1 + ओ^2)^3 &= (-ओ)^3 \\
 &= -ओ^3 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

७.६ अनुच्छेद ७३ के फल महत्वपूर्ण हैं क्योंकि उनका सहायता से वृत्त द्विघात-समीकार के मूलों को धारण करने वाली पदसंहति की अर्धा निकाली जा सकती है। निम्नलिखित उदाहरण बोधात्मक हैं—

उदाहरण १— यदि अ तथा आ,  $य^2 = तय + य =$  के मूल हों तो इन पदसंहतियों की अर्धा त और य पदों में निकालो —

- (१) अ<sup>३</sup> + अ × आ + आ<sup>३</sup>
- (२) अ<sup>३</sup> + आ<sup>३</sup>



$$(३) अ^४ + आ^४$$

दत्त समीकार में गुणकों और मूलों के सम्बन्ध ये हैं —

$$अ + आ = त$$

$$अ \times आ = थ$$

अथ

$$\begin{aligned} (१) अ^३ + अ \times आ + आ^३ &= अ^३ + २अ \times आ + आ^३ - अ \times आ \\ &= (अ + आ)^३ - अ \times आ \\ &= त^३ - थ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (२) अ^३ + आ^३ &= (अ + आ) (अ^२ - अ \times आ + आ^२) \\ &= [अ + आ][अ^२ + २अ \times आ + आ^२ - ३अ \times आ] \\ &= [अ + आ] [(अ + आ)^२ - ३अ \times आ] \\ &= त [त^२ - ३थ] \\ &= त^३ - ३तथ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (३) अ^४ + आ^४ &= अ^४ + आ^४ + २अ^३ \times आ^२ - २अ^३ आ^२ \\ &= [अ^३ + आ^३]^२ - २अ^३ \times आ^३ \\ &= [अ^३ + आ^३ + २अ \times आ - २अ \times आ]^२ \\ &\quad - २अ^३ \times आ^३ \\ &= [(अ + आ)^३ - २अ \times आ]^२ - २अ^३ \times आ^३ \\ &= [त^३ - २थ]^२ - २थ^२ \\ &= त^४ - ४त^३थ + ४थ^२ - २थ^२ \\ &= त^४ - ४त^३थ + २थ^२ \end{aligned}$$

उदाहरण २— यदि  $x$  और  $y$ ,  $x^2 + xy + y^2 = 0$  के मूल हों तो ऐसा समीकरण बनाओ जिसके मूल  $(x^2 + y^2)$ ,  $(x^3 + y^3)$  हों।

पर्यंक  $x^2 + xy + y^2 = 0$  के मूल  $x$  और  $y$  हैं,  
इसलिये

$$x + y = -\frac{y}{x}$$

$$x \times y = \frac{y}{x}$$

अपेक्षित समीकरण में

$$\text{मूलों का योग} = (x^2 + y^2) + \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$$

$$= x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 \times y^2}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(1 + x^2 y^2)}{x^2 \times y^2}$$

$$= \frac{[(x + y)^2 - 2xy][1 + x^2 y^2]}{x^2 \times y^2}$$

$$\frac{\left( \frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} \right) \left( 1 + \frac{y^2}{x^2} \right)}{\frac{y^2}{x^2}}$$

$$= \frac{(y^2 - 2xy)(x^2 + y^2)}{x^2 y^2}$$

मूलों का गुणनफल

$$= (अ^2 + आ^2) \left( \frac{1}{अ^2} + \frac{1}{आ^2} \right)$$

$$= \frac{(अ^2 + आ^2)^2}{अ^2 \times आ^2}$$

$$= \frac{[(अ + आ)^2 - 2अ \times आ]^2}{अ^2 \times आ^2}$$

$$= \frac{\left[ \frac{ख^2}{क^2} - 2 \frac{ग}{क} \right]^2}{\frac{ग^2}{क^2}}$$

$$= \frac{(ख^2 - 2कग)^2}{क^2 ग^2}$$

अतः अपेक्षित समीकार

$$य^2 - \frac{(ख^2 - 2कग)(क^2 + ग^2)}{क^2 ग^2} य + \frac{(ख^2 - 2कग)^2}{क^2 ग^2} = 0$$

$$\text{अर्थात् } क^2 ग^2 य^2 - (ख^2 - 2कग)(क^2 + ग^2) य + (ख^2 - 2कग)^2 = 0$$

७६। यदि समीकार कय^2 + खय + ग = 0 के मूल

(१) महत्ता में समान । फलतः उपरोक्त चिह्न क, हों,

(२) परस्पर व्युत्क्रम हों,

अथवा (३) एक मूल दूसरे के म थार हो तो आवश्यक प्रतिबंध निकालना ।

(१) अब मूलों के महत्ता में समान किन्तु विपरीत चिह्न के होने के लिए उनका योग शून्य के सम होना चाहिए ।

$$\text{अर्थात् } \mathbf{अ + आ = 0}$$

$$\text{अतः } -\frac{\mathbf{ख}}{\mathbf{क}} = 0$$

$$\therefore \mathbf{ख} = 0$$

इसलिए यदि  $\mathbf{ख} = 0$  हो तो  $\mathbf{कय^2 + खय + ग = 0}$  इस समीकार के मूल महत्ता में समान किन्तु विपरीत चिह्न के होंगे ।

(२) मूलों के परस्पर व्युत्क्रम होने के लिए उनका गुणन-फल एक के सम होना चाहिए ।

$$\text{अतः } \mathbf{अ \times आ = 1}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{ग}}{\mathbf{क}} = 1$$

$$\text{अथवा } \mathbf{ग = क}$$

$\therefore$  यदि  $\mathbf{ग = क}$  तो द्विघात-समीकार के मूल परस्पर व्युत्क्रम होंगे ।

$$(३) \text{ मान लो } \mathbf{आ = म \times अ}$$

$$\therefore \mathbf{अ + म \times अ = -\frac{\mathbf{ख}}{\mathbf{क}} \dots\dots\dots (५)}$$

$$\text{और } \mathbf{म \times अ^2 = \frac{\mathbf{ग}}{\mathbf{क}} \dots\dots\dots (६)}$$

(प) और (क) में से अ का निरसन करने पर अपेक्षित प्रतिबंध प्राप्त होगा।

$$अ (१+म) = -\frac{ख}{क}$$

$$अ^२ (१+म)^२ = \frac{ख^२}{क^२}$$

$$\frac{(१+म)^२ ग}{क \times म} = \frac{ख^२}{क^२} \quad \left[ \because अ^२ = \frac{ग}{कम} \right]$$

$$मख^२ = कग (१+म)^२$$

यह अपेक्षित प्रतिबंध है।

## प्रश्नावलि ९

(१) इन समीकारों के मूलों का स्वरूप निश्चित करो और उनकी महर्षि निकालो—

(च)  $y^२ - ४y - ३ = ०$

(छ)  $y^२ - २y - २ = ०$

(ज)  $y^२ - १४y + ४९ = ०$

(झ)  $y^२ - २१ + १० = ०$

(२) ऐसे समीकार बनाओ जिनके निम्न-लिखित मूल हों।

(च) ५, ७ (छ) -३, ४ (ज) -३, -५ (झ)  $१ \pm \sqrt{२}$

(ट)  $-२ \pm \sqrt{३}$  (ठ)  $३ \pm ५श$  (ड)  $-३ \pm २श$

(द)  $-क \pm 2\sqrt{2ख}$

- (३) म की किस अर्धा के लिए समीकार  
 $y^2 - 2(५ + २म) y + ३ (७ + १०म) = ०$  के मूल  
 (च) समान (छ) परस्पर व्युत्क्रम (ज) रूढ़ताम समान  
 किन्तु विपरीत चिह्न के होंगे।

- (४) यदि द्विघात-समीकार  
 $(क^2म^2 + ख^2) y^2 + २मक^2y + क^2(ग^2 - ख^2) = ०$   
 के मूल समान हों तो दिखाओ कि  
 $ग = \sqrt{क^2म^2 + ख^2}$

- (५) यदि समीकार  $y^2 - तय + थ^2 = ०$  के मूल वास्तविक  
 हों तो दिखाओ कि त,  $-२थ$  तथा  $+२थ$  के बीच में  
 नहीं रह सकता।

- (६) यदि समीकार  $y^2 + तय + थ = ०$  का एक मूल दूसरे  
 का वर्ग हो तो सिद्ध करो कि  
 $त^३ - थ (३त - १) + थ^३ = ०$

- (७) यदि समीकार  $कय^२ + खय + ग = ०$  के मूलों की  
 निष्पत्ति 'न' हो तो दिखाओ कि 'न' समीकार  
 $कग न^२ + (२कग - ख^२) न + कग = ०$  का समाधान  
 करता है।

- (८) यदि समीकार  $कय^२ + खय + ग = ०$  के मूलों की  
 निष्पत्ति  $क, य^२ + ख, य + ग, = ०$  के मूलों की  
 निष्पत्ति के समान हो तो दिखाओ कि

$$\frac{ख^२ग,}{क} = \frac{ख,^२ ग}{क,}$$

(९) समीकार  $कय^२ + खय + ग = ०$  के मूलों के लिए प्रति-  
बंध निकालो जहाँ के

(१) दोनों धन हों।

(२) एक धन तथा दूसरा ऋण हो, पर महत्ता में  
धनमूल की अपेक्षा बड़ा हो।

(१०) समीकार  $य^२ - १०य + १ = ०$  के मूलों का योग,  
अन्तर तथा गुणनफल निकालो।

(११) यदि समीकार  $कय^२ + खय + ग = ०$  का एक मूल  
दूसरे के तीन बार हो तो दिखाओ कि

$$३ ख^२ = १६ कग$$

(१२) यदि  $कय^२ + खय + ग = ०$  के मूल अ तथा आ हों तो  
निम्न पदसंहतियों की अर्थात् क, ख, ग के पदों में  
निकालो।

(ख)  $अ^२ + आ^२$  (छ)  $\frac{अ^३}{आ} + \frac{आ^३}{अ}$

(ज)  $अ^२ आ^२ + अ^२ \times आ^२$

(१३) यदि समीकार  $य^२ + मय + म^२ + न^२ = ०$  के मूल अ  
तथा आ हों तो दिखाओ कि

(१)  $अ^२ + अ \times आ + आ^२ = -न^२$  और

(२)  $अ^२ + अ^२ आ^२ + आ^२ = न^२ [२म^२ + ३न^२]$

[यग्यई १८९०]

(१४) यदि समीकार  $य^२ - तय + थ = ०$  के मूल अ और  
आ हों तो

$$(घ) \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \quad (छ) \frac{x}{y^3} - \frac{y}{x^3} \quad (ज) \frac{x^2}{y^3} - \frac{y^2}{x^3}$$

की अर्थात् त और थ के पदों में निकालो।

(१५) यदि समीकार  $y^2 - y + 1 = 0$  के मूल अ और आ हों तो ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल  $\frac{1+x}{y}, \frac{1+y}{x}$  हों।

(१६) यदि  $y^2 + y + 1 = 0$  के मूल अ और आ हों तो ऐसा समीकार बनाओ जिसके मूल  $\frac{1+x}{1-x}, \frac{1+y}{1-y}$  हों।

(१७) यदि  $ky^2 + xk + y = 0$  के मूल अ तथा आ हों तो ऐसे समीकार बनाओ जिन के मूल ये हों

$$(१) \frac{1}{x+y}, \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$(२) (x+y)^2, (x-y)^2$$

(१८) यदि समीकार  $y^2 - ty + y = 0$  के मूल अ और आ हों तो ऐसे समीकार बनाओ जिन के मूल ये हों

$$(१) \frac{x}{y}, \frac{y}{x} \quad (२) \frac{2}{x}, \frac{2}{y} \quad (३) \frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}$$

$$(२) x + \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}$$

(१९) यदि समीकार

$$y^2 - (1+t^2)y + 1(1+t^2+t^2) = 0$$



$\frac{y^2 - y + 1}{y^2 + y + 1}$  यह पदसंहति ३ तथा  $\frac{1}{3}$  के बीच में रहती है।

$$\text{मान लो } \frac{y^2 - y + 1}{y^2 + y + 1} = r$$

$$\therefore y^2 - y + 1 = r(y^2 + y + 1)$$

$$y^2(1-r) - y(1+r) + 1-r = 0$$

फ्योंकि  $y$ , केवल वास्तविक अर्थात् ग्रहण करता है, इसलिए इस समीकार के मूल वास्तविक होने चाहिए।

अतः इसका विवेचक धन होना चाहिए।

अर्थात्  $(1+r)^2 - 4(1-r)^2$  धन होना चाहिए।

$1 + 2r + r^2 - 4(1 - 2r + r^2)$  धन होना चाहिए।

$-3r^2 + 10r - 3$  धन होना चाहिए।

$3r^2 - 10r + 3$  ऋण होना चाहिए।

$(3r-1)(r-3)$  ऋण होना चाहिए।

यदि (१)  $3r-1$  धन हो

और  $r-3$  ऋण हो

अथवा (२)  $3r-1$  ऋण हो

और  $r-3$  धन हो तो यह संभव होगा।

प्रथम दशा पर विचार करो

$3r-1$  धन होना चाहिए।

$$\therefore 3r > 1$$

अथवा  $r > \frac{1}{3}$

अर्थात्  $r < \frac{2}{3}$

और  $r - \frac{1}{3}$  श्रृण होना चाहिए

$r < \frac{2}{3}$  अर्थात्  $r < \frac{2}{3}$

$r$  की  $\frac{1}{3} < r < \frac{2}{3}$  पेसी अर्द्धांशों से दोनों प्रतिबंधों

का एक साथ पालन होता है।

दूसरी दशा—

$3r - 1$  श्रृण होना चाहिए।

यदि  $3r < 1$  तो यह संभव है।

अर्थात्  $r < \frac{1}{3}$

और  $r - \frac{1}{3}$  घन होना चाहिए।

यदि  $r > \frac{1}{3}$  तो यह संभव है।

यदि  $r < \frac{1}{3}$  और तभी  $r > \frac{1}{3}$  तो दोनों प्रतिबंधों का

पालन हो सकता है किन्तु यह असंभव है।

ननः  $r$  की अर्थात् पदमहति की अर्द्धांशों के लिए, प्रथम दशा में सीमाएँ प्राप्त होती हैं।

७.८ त्रिगुण संज्ञान के चिह्न में परित्यक्त—  $r$  की यास्तविक अर्द्धांशों के लिए पदमहति  $यय^2 + य + य$  का चिह्न सप्त दशांशों में  $क$  के चिह्न के समान होता है जेयन

उस दशा को छोड़कर जहाँ समीकार  $कय^२ + खय + ग = ०$  के मूल वास्तविक तथा असम हों और य की अर्धा उन के बीच रहती हो, इस दशा में पदसंहति का चिह्न 'क' के चिह्न के विपरीत होता है।

दशा १—मान लो समीकार  $कय^२ + खय + ग = ०$  के मूल वास्तविक और असम हैं और ये क्रमशः अ तथा आ के सम हैं। मान लो अ, आ से बड़ा है

$$\text{पदसंहति } कय^२ + खय + ग$$

$$= क \left[ य^२ + \frac{ख}{क} य + \frac{ग}{क} \right]$$

$$= क [य^२ - (अ + आ) य + अ \times आ]$$

$$= क [य - अ] [य - आ]$$

यदि य की अर्धा मूल अ से बड़ी हो तो य - अ तथा य - आ दोनों ही धन होंगे और यदि य मूल आ से छोटा हो तो अ > आ रहने के कारण य - अ और य - आ दोनों ही ऋण होंगे। अतः प्रत्येक दशा में गुणनफल (य - अ) (य - आ) धन होगा।

अतः इस दशा में क (य - अ) (य - आ) का चिह्न क के चिह्न के समान है। अतः जब य की अर्धा मूल अ से बड़ी और मूल आ से छोटी हो अर्थात् जब य मूल अ और मूल आ के बीच नहीं होता, पदसंहति

$कय^२ + खय + ग$  का चिह्न क के चिह्न के समान होता है।

अब य की अ और आ के बीच की अर्धामों पर विचार करो।

अब  $अ > य > आ$

अतः इस दशा में खण्ड य-अ ऋण होगा और खण्ड य-आ धन होगा।

अतः गुणनफल (य-अ) (य-आ) ऋण होगा।

अतः क (य-अ) (य-आ) का चिह्न क के चिह्न के विपरीत होगा और इस दशा में पदसंहति का चिह्न क के चिह्न के विपरीत होगा।

दशा २—

मान लो  $अ = आ$

अब  $कय^2 + खय + ग = क (य - अ)^2$  [∵  $अ = आ$

क्योंकि य-अ)² य की सश वास्तविक अर्थात् के लिए धन है इसलिए पदसंहति  $कय^2 + खय + ग$  का चिह्न क के चिह्न के समान होगा।

दशा ३—

मान लो समीकार  $कय^2 + खय + ग = 0$  के मूल संकर हैं।

इस प्रतिबंध के लिए  $ख^2 - ४कग$  ऋण होना चाहिए।

$$\text{अब } कय^2 + खय + ग = क \left[ य^2 + \frac{ख}{क} य - \frac{ग}{क} \right]$$

$$= क \left[ \left( य + \frac{ख}{२क} \right)^2 + \frac{ग}{क} - \frac{ख^2}{४क^2} \right]$$

$$= क \left[ \left( य + \frac{ख}{२क} \right)^2 + \frac{४कग - ख^2}{४क^2} \right]$$

क्योंकि  $ख^2 - ४कग$  ऋण है इसलिए  $४कग - ख^2$  धन है।

अतः य की सय वास्तविक अर्धों के लिए

$$\left(y + \frac{ख}{२क}\right)^2 + \frac{४कग - ख^2}{४कग} \text{ धन है। अतः पदसंहति}$$

$कय^2 + खय + ग$  का चिह्न क के चिह्न के समान है।

उपर्युक्त पर्यालोचन से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि यदि  $ख^2 - ४कग$  ऋण अथवा शून्य हो अर्थात् मूल संकर अथवा वास्तविक और समान हो तो पदसंहति का चिह्न, य की सय वास्तविक अर्धों के लिए क के चिह्न के समान होता है।

७.८१ यह पहले ही बताया जा चुका है कि यदि समीकार  $कय^2 + खय + ग = ०$  के मूल अ और आ हों तो पदसंहति  $कय^2 + खय + ग$  को  $क(य-अ)(य-आ)$  में व्यक्त कर सकते हैं। अब समीकार  $कय^2 + खय + ग = ०$  के मूलों के अर्थात् अ और आ के (१) वास्तविक और असम (२) वास्तविक और समान (३) संकर रहने के अनुसार पदसंहति  $कय^2 + खय + ग$  के खण्ड क्रमशः (१) वास्तविक और असम (२) वास्तविक और समान (३) संकर रहते हैं।

अतः

(१) यदि  $ख^2 > ४कग$  तो  $कय^2 + खय + ग$  को दो विभिन्न और वास्तविक खण्डों में बांटा जा सकता है।

(२) यदि  $ख^2 = ४कग$  तो  $कय^2 + खय + ग$  को दो

वास्तविक और समान खण्डों में बांटा जा सकता है अर्थात्  $कय^2 + खय + ग$  पूर्ण वर्ग होगा।

(३) यदि  $ख^2 < ४कग$  तो  $कय^2 + खय + ग$  को दो रेखीय (linear) और वास्तविक खण्डों में नहीं बांटा जा सकता।

७.९ य और र के द्विघात-श्रित का रेखीय खण्डीकरण होने के लिए प्रतिबन्ध निकालना।

मान लो  $कय^2 + २जयर + खर^2 + २छय + २चर + ग$  य और र का द्विघात-श्रित है।

इसका य के द्विघात-श्रित के रूप में विन्यास करने पर  $कय^2 + २य (जर + छ) + खर^2 + २चर + ग$  प्राप्त होता है। यदि  $क \neq ०$  तो गादि से अन्त तक क से गुणा और भाग करो।

$$\therefore \frac{१}{क} [क^२य^२ + २कय(जर + छ) + कखर^२ + २कचर + कग]$$

अब य के पदों का पूर्ण वर्ग करने से

$$\frac{१}{क} [(कय + जर + छ)^२ + कखर^२ + २कचर + कग - (जर + छ)^२]$$

प्राप्त होता है।

इस को इस रूप में लिख सकते हैं—

$$\frac{१}{क} [(कय + जर + छ)^२ - \{र^२(ज^२ - कख) + २र(जछ - कच + (छ^२ - कग))\}]$$

अथवा

$$\frac{1}{k} [(कय + जर + छ)^2]$$

$$-(\sqrt{र^2(ज^2 - कख) + २र(जछ - कच) + (छ^2 - कग)})^2]$$

अब दो घर्गों का अन्तर प्राप्त हुआ है जो दो खण्डों के गुणन-फल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$\text{अतः } \frac{1}{k} [(कय + र + छ)$$

$$\pm \sqrt{र^2(ज^2 - कख) + २र(जछ - कच) + (छ^2 - कग)}]$$

ये दो खण्ड प्राप्त होते हैं।

खण्डों के रेखीय होने के लिए मूल चिह्न के नीचे की राशि पूर्ण वर्ग होनी चाहिए। इसके लिए आवश्यक प्रतिबंध यह है कि

$$र^2(ज^2 - कख) + २र(जछ - कच) + छ^2 - कग = ०$$

क मूल वास्तविक और समान होने चाहिए!

$$\text{अतः } ४(जछ - कच)^2 - ४(छ^2 - कग)(ज^2 - कख) = ०$$

यह अपेक्षित प्रतिबंध है। इसे सरल करने से  $कखग + २चछज - कच^2 - खछ^2 - गज^2 = ०$  प्राप्त होता है।

मूल चिह्न के नीचे की 'र' की द्विघात-पदसंहति के पूर्ण वर्ग होने के लिये अर्थात् य और र के द्विघात-धित के रेखीय खण्डीकरण के लिए यह प्रतिबंध है।

$$७.९१ \quad कय^2 + खय + ग = ०$$

$$\text{और } क, य^2 + ख, य + ग, = ०$$

इन समीकारों में एक साधारण मूल रहने के लिए प्रतिबन्ध निकालना।

मान लो दत्त समीकारों में साधारण मूल अ है।

$$\therefore कअ^2 + खअ + ग = 0$$

$$क, अ^2 + ख, अ + ग, = 0$$

तिर्यग् गुणन के नियम से यह फल प्राप्त होगा—

$$\frac{अ^2}{खग, - ख, ग} = \frac{अ}{गक, - ग, क} = \frac{1}{कख, - क, ख}$$

दूसरे के घर्ग को पहिले और तीसरे के गुणनफल के सम करने से 'अ' का निरसन (elimination) करो

$$\frac{अ^2}{(गक, - ग, क)^2} = \frac{अ^2}{(खग, - ख, ग)(कख, - क, ख)}$$

अतः  $(खग, - ख, ग)(कख, - क, ख) = (गक, - ग, क)^2$   
यह अपेक्षित प्रतिबन्ध है।

### प्रश्नावलि १०

(१) य की किन वास्तविक अर्धियों के लिए पदसंहति  
 $६ य^2 - य - ४०$  घन होगी ?

(२) य की किन वास्तविक अर्धियों के लिए पदसंहति

$$\frac{(य-३)(४य^2-४य+१)}{(य+२)(य^2-३य+३)} \text{ घन होगी ?}$$



(३) सिद्ध करो कि  $y$  की सब वास्तविक अर्धामों के लिए पदसंहति  $\frac{y^2+3}{y+1}$  २ और -६ के बीच में नहीं रह सकती।

(४) यदि  $y$  वास्तविक हो तो दिखाओ कि पदसंहति  $\frac{y^2+1}{y^2+3y+1}$ , -२ तथा  $\frac{2}{5}$  के बीचमें नहीं रह सकती।

(५) दिखाओ कि  $y$  की सब वास्तविक अर्धामों के लिए पदसंहति  $\frac{y^2-2y+1}{y^2+2y+8}$  ३ और  $\frac{1}{3}$  के बीच में रहती है।

(६) यदि  $y$  वास्तविक हो तो दिखाओ कि  $\frac{2y^2+4y-4}{y^2+y+8}$  पदसंहति  $-\frac{9}{2}$  और २ के बीच में रहती है।

(७) यदि  $y$  वास्तविक हो तो सिद्ध करो कि  $\frac{3y^2+4y+2}{y^2+4y+2}$  पदसंहति -१ तथा +१ के बीच में नहीं रह सकती। [नागपुर १९३९]

(८) यदि  $y$  वास्तविक हो तो  $\frac{4y^2-2y+3}{2y^2-2y+1}$  की सीमाएं

निकालो ।

[नागपुर १९३८]

(९) यदि य वास्तविक हो तो सिद्ध करो कि

$\frac{य^२ + ३४य - ७१}{य^२ + २य - ७}$  पदसंहति की अर्हापं ५ और ९ के

बीच में नहीं रह सकती ।

[मद्रास १९३५]

(१०) सिद्ध करो कि य की सब वास्तविक अर्हाओं के लिए

$\frac{य^२ - ३य + ४}{य^२ + ३य + ४}$  की पदसंहति  $\frac{१}{७}$  और ७ के बीच में

रहती है ।

[कलकत्ता १९४०]

(११) यदि  $t > १$  हो तो दिखाओ कि  $\frac{य^२ - य}{१ - तय}$  पदसंहति

सब वास्तविक अर्हापं ले सकती है ।

[मद्रास

(१२) दिखाओ कि य की सब वास्तविक अर्हाओं के लिए

$\frac{(य-१)(य+३)}{(य-२)(य+४)}$  पदसंहति  $\frac{४}{९}$  और १ के बीच में

नहीं रह सकती ।

[मद्रास १८८४]

(१३) यदि य वास्तविक हो और क, ख, ग की अर्हापं आरोही अथवा अवरोही क्रम में हों तो सिद्ध करो कि

पदसंहति  $\frac{(य-क)(य-ग)}{य-ख}$  सब अर्हापं ले सकती है

(१४) इन पदसंहतियों को रेखीय खण्डों में बांटने के लिए त की अर्हापं निकालो

$$(1) 2y^2 + 4y - 2^2 + 4y + 4 - 2$$

$$(2) 12y^2 + 4y - 4^2 + 12y + 4 - 4$$

$$(3) 12y^2 - 10y + 2^2 + 12y - 4 + 2$$

[मद्रास १९३९]

$$(14) 3y^2 + 4xy + 2 = 0 \text{ और}$$

$2y^2 + 3y - 2 = 0$  इन समीकारों में एक साधारण मूल रहने के लिए  $x$  की भर्ती निश्चित करो।

[कलकत्ता १९३४]

$$(15) ky^2 + xy + g = 0 \text{ और } k, y^2 + x, y + g, = 0$$

इन समीकारों में एक साधारण मूल है।  
यदि  $\frac{k}{k}, \frac{x}{x}, \frac{g}{g}$  समान्तर श्रेणी में हों तो दिखाओ

कि  $k, x, g$ , गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

$$(16) \text{ यदि } y^2 + 4y + 4 = 0 \text{ और } y^2 + 4y + 4 = 0 \text{ में}$$

एक साधारण मूल हो तो दिखाओ कि वह

$\frac{4y - 4}{y - 4}$  अथवा  $\frac{y - 4}{4 - 4}$  के सम है।

[कलकत्ता १९११]

$$(17) \text{ यदि } y^2 + xy + k = 0 \text{ और } y^2 + ky + x = 0$$

में एक साधारण मूल हो तो सिद्ध करो कि प्रत्येक का

शेष मूल समीकार  $y^2 + ky + x = 0$  का समाधान करता है।

[कलकत्ता १८९२]

$$(18) \text{ यदि } ky^2 + 2xy + g = 0$$

और  $k, y^2 + 2xy + g, = 0$  इन समीकारों में एक साधारण मूल हो तो सिद्ध करो कि समीकार  $(x^2 - kg) y^2 + (2xg, - kg, - k, g) y + xg, - k, g, = 0$  के मूल समान होंगे।

(२०) यदि समीकार  $ky^2 + 2xy + g = 0$  के मूल  $\alpha$  और  $\beta$  हों और  $k, y^2 + 2xy + g, = 0$  के मूल  $(\alpha + \beta)$  और  $(\alpha + \beta)$  हों तो सिद्ध करो कि 
$$\frac{x^2 - kg}{k^2} = \frac{x,^2 - k, g,}{k,^2} \quad [\text{फलकत्ता १९१२}]$$

(२१)  $k$  की किस अर्था के लिए  $y^2 + 2xy + k$  और  $y^2 + 2xy + 3k$  इन पदसंहातियों में साधारण खण्ड होगा?

(२२)  $ky^2 + 2xy + x^2$  और  $k, y^2 + 2x,^2 y + x,^2$  इन पदसंहातियों का भाजन क्रमशः  $x - my$  और  $mx + y$  रूप के खण्डों से होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध निकालो।

## आठवां अध्याय

### समीकार

प्रथम भाग (एक अज्ञात)

८.१ इस विभाग में ऐसे समीकारों का पर्यालोचन किया जायगा, जिनका साधन अन्ततः द्विघात समीकार के साधन पर निर्भर रहेगा। दत्त समीकार, द्विघात-समीकार  $कर^2 + खर + ग = ०$  के रूपमें प्रहास्य होंगे, जिसमें  $र$ ,  $य$  का कोई स्थित है। इस समीकार से प्राप्त  $र$  की दो अर्हियों से  $य$  के दो समीकार प्राप्त होंगे।  $य$  के लिए इनका साधन करने पर  $य$  की प्राप्त अर्हियों से दत्त समीकार का समाधान होगा।

उपयुक्त प्रहसन और पुनर्विन्यास से किस प्रकार समीकारों का साधन किया जा सकता है यह इन साधित उदाहरणों से छात होगा—

उदाहरण १—  $य^2 + २य - ३ = ०$  का साधन करो।

दत्त समीकार में  $य^2 = २$  रखो।

$$\therefore y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{x}$$

अतः समीकार का प्रहसन

$$x + \frac{2}{x} - 3 = 0 \text{ में होता है।}$$

अथवा  $x^2 - 3x + 2 = 0$

अथवा  $(x-2)(x-1) = 0$

अतः  $x = 2$  अथवा  $1$

किन्तु  $y^{\frac{1}{2}} = x$

$\therefore y^{\frac{1}{2}} = 2$  और  $y^{\frac{1}{2}} = 1$

$\therefore y = 4$  और  $y = 1$

उदाहरण २—  $2y^2 - 3y - 3\sqrt{2y^2 - 3y + 2} + 4 = 0$   
का साधन करो।

दत्त समीकार इस रूप में लिखा जा सकता है —

$$2y^2 - 3y + 2 - 3\sqrt{2y^2 - 3y + 2} + 2 = 0$$

मान लो  $\sqrt{2y^2 - 3y + 2} = x$

इस से समीकार का यह प्रहसन होता है —

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

अर्थात्  $(x-2)(x-1) = 0$

$x = 2$  अथवा  $x = 1$

अथ  $\sqrt{2y^2 - 3y + 2} = x$

अतः

$$(1) \quad \sqrt{2y^2 - 3y + 2} = 2$$

$$2y^2 - 3y + 2 = 4$$

$$\text{अथवा } 2y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$\text{अथवा } (2y + 1)(y - 2) = 0$$

$$y = -\frac{1}{2} \text{ अथवा } 2$$

$$(2) \quad x = 1 \text{ लेने से}$$

$$\sqrt{2y^2 - 3y + 2} = 1$$

$$2y^2 - 3y + 2 = 1$$

$$\text{अथवा } 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\text{अथवा } (2y - 1)(y - 1) = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \text{ अथवा } 1$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, \text{ अथवा } 2$$

उदाहरण ३—

$(y-1)(y-3)(y+4)(y+2) + 16 = 0$  का साधन करो ।

$$\text{अथ } (y-3)(y+4) = y^2 + y - 12$$

$$\text{और } (y-1)(y+2) = y^2 + y - 2$$

अतः दत्त समीकार का प्रहसन (उपयुक्त रीति से खण्डों

को गुणा करने पर)

$(y^2 + y - 12)(y^2 + y - 2) + 16 = 0$  में होता है।

मान लो  $y^2 + y = r$

$$\therefore (r - 12)(r - 2) + 16 = 0$$

$$r^2 - 14r + 40 = 0$$

अर्थात्  $r = 10$  अथवा  $4$

अतः  $y^2 + y = 10$  अथवा  $y^2 + y = 4$

अब  $y^2 + y - 10 = 0$  से

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2} \text{ प्राप्त होता है।}$$

और  $y^2 + y = 4$  से

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ प्राप्त होता है।}$$

$$\text{अतः } y = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

८.११ घात-समीकार [exponential equation]—

जिन समीकारों में अज्ञात राशि एक अथवा अनेक ज्ञात राशियों के घातों में आती है, उन्हें घात समीकार कहते हैं। ऐसे समीकारों का साधन किस प्रकार किया जा सकता है, यह इन साधित उदाहरणों में दिखाया गया है—

उदाहरण १—  $3^{2y+1} = 81 \times 3^4$  का साधन करो।

$$\text{अब } 2^{2y+1} = 81 \times 3^4$$



$$= 2^x \times 2^y$$

$$= 2^9$$

क्योंकि दोनों पक्षों में आधार एक ही है, इसलिए दोनों पक्षों के घात समान होने चाहियें।

$$\therefore 2^y + 1 = 9$$

$$\text{अथवा } y = 8$$

उदाहरण २—  $2^{2y+3} - 49 = 64(2^y - 1)$  का साधन करो।

$$2^{2y+3} - 49 = 64(2^y - 1)$$

$$2^{2y+3} - 64 \times 2^y - 49 + 64 = 0$$

$$2^{2y} \times 2^3 - 64 \times 2^y + 15 = 0$$

$$4 \times 2^{2y} - 64 \times 2^y + 15 = 0$$

$2^y = r$  रखने से समीकार का प्रदशन

$$4r^2 - 64r + 15 = 0 \text{ में होता है।}$$

$$\therefore (r-15)(4r-1) = 0$$

$$r = 15 \text{ अथवा } \frac{1}{4}$$

$$\text{किन्तु } r = 2^y$$

$$\text{अतः } 2^y = 15 \text{ अथवा } \frac{1}{4}$$

$$= 2^3 \text{ अथवा } \frac{1}{2^2}$$

$$\therefore y = 3 \text{ अथवा } -2$$

## ८.२. अनुच्छेद ८.१ में

$$कय^2 + खय + ग + त \sqrt{कय^2 + खय + ग} = थ$$

इस रूप के समीकार साधित किए जा चुके हैं जिनमें मूल-चिह्न उपयुक्त आदेश विधा से हटाया जा सकता है। परन्तु समीकार से मूल चिह्न हटाने के पहिले यह देखना आवश्यक है कि कोई समापवर्तक (common factor) हटाया जा सकता है या नहीं। इस उदाहरण पर विचार करो।

उदाहरण १—  $\sqrt{य^2 - २य - १५} - \sqrt{य^2 - ७य + १०} = य - ५$   
 -५ का साधन करो।

अब दत्त समीकार

$$\sqrt{य^2 - २य - १५} - \sqrt{य^2 - ७य + १०} = य - ५$$

$$\sqrt{(य+३)(य-५)} - \sqrt{(य-२)(य-५)} = य - ५$$

इस रूप में लिखा जा सकता है। प्रत्येक पद में से खण्ड  $\sqrt{य-५}$  हटाने पर

$$\sqrt{य+३} - \sqrt{य-२} = \sqrt{य-५}$$

दोनों दक्षों का वर्ग करने से

$$य+३+य-२-२\sqrt{(य+३)(य-५)} = य-५$$

$$य+६=२\sqrt{(य+३)(य-२)}$$

पुनः वर्ग करने से

$$य^2 + १२य + ३६ = ४(य+३)(य-२)$$

$$य^2 + १२य + ३६ = ४य^2 + ४य - २४$$

$$3y^2 - 4y - 60 = 0$$

$$\therefore y = 6, -\frac{10}{3}$$

और छण्ड  $\sqrt{y-4}$  को शून्य के सम करने से  $y=4$  मिलता है। अथ दत्त समीकार में  $y=6$  रखने से समीकार का समाधान होता है। अतः  $y=6$  समीकार का मूल है।

किन्तु  $y = -\frac{10}{3}$  रखने से समीकार का समाधान नहीं होता। अतः यह समीकार का मूल नहीं है।

$\therefore$  समीकार के मूल 4 और 6 हैं।

आलोक (note)— समीकार साधन करते समय कभी मूल चिह्न हटाने के लिए और कभी समीकार का साधन सरल करने के लिए, समीकारों को वर्गित करना पड़ता है। समीकारों को वर्गित करने पर समीकार का घात उच्च हो जाता है। अतः अन्त में अज्ञात की ऐसी अर्हापें भी प्राप्त होती हैं, जिनसे समीकार का समाधान नहीं होता। अज्ञात की ऐसी अर्हाओं को छोड़ दिया जाता है और समीकार का समाधान करने वाली अर्हापें केवल ली जाती हैं।

८.३ व्युत्क्रम समीकार (reciprocal equation)—  
अथ  $6y^4 - 17y^3 + 28y^2 - 17y + 6 = 0$

$$\text{और } 4y^4 - 12y^3 + 9y^2 + 6y^2 - 12y + 4 = 0$$

इस प्रकार के समीकारों पर विचार करो।

ऐसे समीकारों में  $y$  का  $\frac{1}{y}$  में परिवर्तन किया जाय तो

सरल करने के पश्चात् समीकार के रूप में परिवर्तन नहीं होता। इस प्रकार के समीकार जिनमें  $y$  का  $\frac{1}{y}$  में परिवर्तन

करने से, समीकार अपरिवर्तित रहते हैं, व्युत्क्रम समीकार कहलाते हैं। ऐसे समीकारों का साधन किस रीति से किया जाता है यह इन साधित उदाहरणों से ज्ञात होगा—

उदाहरण १—  $६य^४ - ३५य^३ + ६२य^२ - ३५य + ६ = ०$  का साधन करो।

$६य^४ - ३५य^३ + ६२य^२ - ३५य + ६ = ०$  इस समीकार का  $य^२$  से [अर्थात् गुणक रहित-मध्य पद से] आदि से अन्त-तक भाजन करो।

$$६य^२ - ३५य + ६२ - \frac{३५}{य} + \frac{६}{य^२} = ०$$

पदों का पुनर्विन्यास करने पर

$$६\left(य^२ + \frac{१}{य^२}\right) - ३५\left(य + \frac{१}{य}\right) + ६२ = ०$$

$$\text{अथ } य + \frac{१}{य} = र \text{ रखो।}$$

$$\therefore य^२ + \frac{१}{य^२} = \left(य + \frac{१}{य}\right)^२ - २ \\ = र^२ - २$$

$$य^२ + \frac{१}{य^२}, य + \frac{१}{य} \text{ की मर््यापि र के पदों में रखो।}$$

समीकार का प्रहसन

$$6(r^2 - 2) - 34r + 62 = 0 \text{ में होता है।}$$

$$\text{अथवा } 6r^2 - 12 - 34r + 62 = 0$$

$$\text{अथवा } 6r^2 - 34r + 50 = 0$$

$$\text{अथवा } (3r - 10)(2r - 5) = 0$$

$$\text{अर्थात् } r = \frac{10}{3} \text{ अथवा } r = \frac{5}{2}$$

$$\text{किन्तु } r = y + \frac{1}{y}$$

$$\therefore y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \text{ अथवा } \frac{5}{2}$$

$$(1) \quad y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3}$$

$$3y^2 - 10y + 3 = 0$$

$$\text{अथवा } (3y - 1)(y - 3) = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}, 3$$

$$(2) \quad y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$\text{अथवा } (2y - 1)(y - 2) = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}, 2$$

अतः  $2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \dots$  ये दत्त समीकार के मूल हैं।

य का  $\frac{1}{y}$  में परिवर्तन करने से समीकार व्यो अपरि

वर्तित रहता है यह उत्तर के रूप से स्पष्ट हो जाता है।

आलोक— व्युत्क्रम समीकार का घात युग्म (even) हो तो उपर्युक्त रीति से उसका साधन किया जा सकता है। यदि व्युत्क्रम समीकार का घात अयुग्म हो तो  $+1$  अथवा  $-1$  इनमें से एक सदैव समीकार का मूल रहता है। इस मूल का संवादी खण्ड निकाल देने पर समीकार का प्रहसन युग्म घात वाले समीकार में होता है और इसका साधन उपर्युक्त रीति से किया जा सकता है।

८.३१ निम्न-लिखित समीकार व्युत्क्रम समीकार न होते हुए भी उसका साधन गत अनुच्छेद में दी गई रीति से ही किया गया है।

उदाहरण—  $4y^2 + 82y^2 + 29y^2 - 82y + 4 = 0$   
का साधन करो।

समीकार का  $y^2$  से आदि से अन्त तक भाजन करो और पुनर्विन्यास करो।

$$4 \left( y^2 + \frac{1}{y^2} \right) + 82 \left( y - \frac{1}{y} \right) + 29 = 0$$

$$\text{प्रय } y - \frac{1}{y} = r \text{ रखो}$$

$$\therefore y^2 + \frac{1}{y^2} = \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + 2$$

$$= 2^2 + 2$$

$\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)$  और  $\left(y - \frac{1}{y}\right)$  की अर्धांशों का र के

पदों में आदेश करने पर

$$4(2^2 + 2) + 422 + 22 = 0$$

$$\text{अथवा } 4 \cdot 2^2 + 16 + 422 + 22 = 0$$

$$\text{अथवा } 4 \cdot 2^2 + 422 + 38 = 0$$

$$\text{अथवा } (22 + 2)(42 + 16) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{3}{2}, \quad -\frac{16}{4}$$

$$\text{किन्तु } y - \frac{1}{y} = r$$

$$\therefore y - \frac{1}{y} = -\frac{3}{2} \text{ अथवा } -\frac{16}{4}$$

$$(1) \quad y - \frac{1}{y} = -\frac{3}{2}$$

$$2y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 2) = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}, \quad -2$$

$$(2) \quad y - \frac{1}{y} = -\frac{14}{8}$$

$$8y^2 + 14y - 8 = 0$$

$$y = -8, \frac{1}{8}$$

अतः  $y = -2, \frac{1}{2}, -8, \frac{1}{8}$  ये दत्त समीकार के

मूल हैं।

## प्रश्नावलि ११

इन समीकारों का साधन करो—

$$(1) \quad 4\sqrt{y} + 9\sqrt{y} = 22\frac{2}{3}$$

$$(2) \quad 2\sqrt{y} + \sqrt{y} = 3$$

$$(3) \quad \sqrt{y+1} + 2\sqrt{y+1} = 3$$

$$(4) \quad 2^{2y+1} + 1 = 32 \times 2^y$$

[नागपुर]

$$(5) \quad 2(y^2 - 3y + 1)^2 + 4(y^2 - 3y + 1) + 3 = 0$$

[कलकत्ता]

$$(6) \quad (y+2)(3y+1)(y-1)(3y+2) = 228$$

[यम्यई]

$$(7) \quad (y+8)(y+9)(y+11)(y+12) + 20 = 0$$

[मद्रास १९१२]



$$(८) (y+1)(y+2)(y+3)(y+4)=24 \quad [\text{मद्रास १९२३}]$$

$$(९) (y^2+4y)(y^2+11y+24)=16 \quad [\text{मद्रास १९११}]$$

$$(१०) \sqrt{y+2} + \sqrt{y-3} = 4 \quad [\text{पंजाब}]$$

$$(११) y^2 - y + 3 \sqrt{2y^2 - 3y + 2} = \frac{y}{2} + 9$$

$$(१२) y^2 + y + 10 \sqrt{y^2 + 3y + 16} = 2(20 - y) \quad [\text{मद्रास}]$$

$$(१३) 3y + 2 \sqrt{y^2 - 3y + 2} = y^2 + 6 \quad [\text{कलकत्ता}]$$

$$(१४) y^2 + \sqrt{y^2 - 4} = 11$$

$$(१५) \sqrt{y^2 + 6y - 9} - \sqrt{3y^2 - 4y + 2} = y + 1$$

$$(१६) \sqrt{27y^2 + 21y + 8} + \sqrt{12y^2 - y - 8} = 9y + 8$$

$$(१७) ८y^4 - ५४y^3 + १०१y^2 - ५४y + ८ = 0$$

$$(१८) १२y^4 + २८y^3 - ९y^2 - २८y + १२ = 0$$

$$(१९) १५y^4 + १२८y^3 + २९०y^2 + १२८y + १५ = 0$$

$$(२०) १२y^4 - १६y^3 - ३७y^2 + ३७y + १६y - १२ = 0$$

द्वितीय भाग (दो अज्ञात)

## युगपत्-समीकार

(simultaneous equation)

८. ४ य और के दो युगपत् समीकारों में एक एकघाती और दूसरा द्विघाती हो तो एकघाती समीकार से एक अज्ञात

की अर्हा दूसरे अज्ञात के पदों में व्यक्त की जा सकती है। इस अर्हा का दूसरा समीकार में आदेश करने पर इस द्विघाती समीकार में फेवल एक ही अज्ञात रह जाता है। अब समीकार का साधन करने पर इस अज्ञात की अर्हा प्राप्त होती है। इनका एकवर्ती समीकार में आदेश करने से दूसरे अज्ञात की अर्हा निकाली जा सकती है।

उदाहरण— समीकार साधन करो

$$4y + 2r = 12$$

$$2y^2 + 3yr + r^2 = 12 \quad [\text{कलकत्ता १८८८}]$$

प्रथम समीकार से  $r = \frac{12-4y}{2}$  प्राप्त होता है।

र की इस अर्हा का आदेश द्वितीय समीकार में करो।

$$2y^2 + 3y \times \frac{12-4y}{2} + \left(\frac{12-4y}{2}\right)^2 = 12$$

$$2y^2 - 8y + 48 = 0$$

$$y^2 - 4y + 24 = 0$$

$$y = 2 \text{ अथवा } 18$$

यदि  $y = 2$  तो प्रथम समीकार से  $r = 1$  प्राप्त होता है और यदि  $y = 18$  तो  $r = -29$  प्राप्त होता है।

$$y = 2, \quad r = 1$$

$$y = 18, \quad r = -29$$

८.४१ समानघात समीकार [ homogeneous equations ]—

जिन समीकारों में प्रत्येक पद की अज्ञात राशियों के घातों का योग एक ही होना है, समानघात समीकार कहलाते हैं।  
उदाहरणार्थ क, य<sup>२</sup> + ख, र<sup>२</sup> + ग, यर = ०

$$\text{क, य}^2 + \text{ख, र}^2 + \text{ग, यर} = 0$$

समानघात समीकार हैं।

$$४य^२ - यर + र^२ = १६$$

$$३य^२ - २यर + र^२ = ८$$

इस प्रकार के समीकार भी समानघात समीकार कहलाते हैं, क्योंकि अचल पदों को छोड़ कर, प्रत्येक में अज्ञात राशियों के घातों का योग एक ही है ऐसे समीकारों का इस रीति से साधन किया जाता है।

उदाहरण—  $य^२ + यर + ४र^२ = ६ \dots\dots\dots (१)$

$$३य^२ + ८र^२ = १४ \dots\dots\dots (२)$$

इनका साधन करो।

(१) और (२) में  $र = मय$  रखो

$$य^२(१ + म + ४म^२) = ६ \dots\dots\dots (३)$$

$$य^२(३ + ८म^२) = १४ \dots\dots\dots (४)$$

(४) से (३) का भाजन करने पर

$$\frac{१ + म + ४य^२}{३ + ८म^२} = \frac{६}{१४} = \frac{३}{७}$$

अर्थात्  $४म^२ + ७म - २ = ०$

$$\therefore म = \frac{१}{४}, \text{ अथवा } -२$$

$$\therefore r = \frac{1}{8}y \quad \text{अथवा} \quad -2y$$

$$(2) \text{ में } r = \frac{1}{8}y \quad \text{रखो}$$

$$\therefore y^2(3 + \frac{1}{2}) = 18 \text{ प्राप्त होता है।}$$

$$\therefore y = \pm 2$$

$$\therefore y = 2 \quad r = \frac{1}{8}$$

$$y = -2 \quad r = -\frac{1}{2}$$

$$\text{अब (2) में } r = -2y \text{ रखो}$$

$$\therefore y^2(3 + 4 \times 8) = 18$$

$$y^2 = \frac{2}{5}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\text{यदि } y = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad \text{तो } r = -2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$y = -\sqrt{\frac{2}{5}} \quad \text{तो } r = 2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

अतः उत्तरों के चार कुलक (sets) प्राप्त होते हैं

$$y = 2 \quad y = -2 \quad y = \frac{\sqrt{10}}{5} \quad y = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$r = \frac{1}{2}, \quad r = -\frac{1}{2}, \quad r = -2\frac{\sqrt{10}}{5}, \quad r = -2\frac{\sqrt{10}}{5}$$

८.४२ सम्मितीय समीकार (symmetrical equations)— य और  $r$  के व्यतिहरण से यदि दत्त समीकार अपरिवर्तित रहें तो ये समीकार, य और  $r$  के सम्मितीय समीकार कहलाते हैं।

ये समीकार य और  $r$  में सम्मितीय हैं। ∴

$$\left. \begin{aligned} y+r &= 4 \\ yr &= 3 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} yr+y+r &= 29 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{r} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

अज्ञात राशियों को दो अन्य राशियों के योग और अन्तर के सम मानने से, इन समीकारों का साधन किया जा सकता है।

उदाहरण—  $y^2 + r^2 = 9 \dots \dots \dots (1)$

$y+r = 3 \dots \dots \dots (2)$

का साधन करो।

इन समीकारों में  $y = p+f$  और  $r = p-f$  रखो।

(२) से

$$p+f+p-f=3$$

$$\text{अथवा } 2p=3$$

$$p=\frac{3}{2}$$

(१) मैं  $y = \frac{3}{2} + फ$  तथा  $r = \frac{3}{2} - फ$  रखने से

$$\left(\frac{3}{2} + फ\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - फ\right)^2 = ९ \text{ प्राप्त होता है ।}$$

$$२ \left[ \left(\frac{३}{२}\right)^2 + \frac{१}{२} फ^2 \right] = ९$$

$$\frac{२७}{४} + १फ^2 = ९$$

$$३६फ^2 = ९$$

$$फ = \pm \frac{१}{२}$$

$$\text{यदि } फ = \frac{१}{२}$$

$$\text{और यदि } फ = -\frac{१}{२}$$

$$\text{तो } y = \frac{३}{२} + \frac{१}{२} = २$$

$$y = \frac{३}{२} - \frac{१}{२} = १$$

$$r = \frac{३}{२} - \frac{१}{२} = १$$

$$r = \frac{३}{२} + \frac{१}{२} = २$$

$$\therefore \begin{bmatrix} y = २ \\ r = १ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y = १ \\ r = २ \end{bmatrix}$$

८.४४ यह समीकार समितीय न होते हुए भी, इनका साधन इसी रीति से किया जा सकता है।

$$\text{उदाहरण— } y^2 + r^2 = ५६ \dots\dots\dots(१)$$

$$y - r = २ \dots\dots\dots(२)$$

का साधन करो।

समीकरणों में  $y = p + f$  और  $r = p - f$  रखो।

$$(2) \text{ से } p + f - (p - f) = 2$$

$$2f = 2$$

$$f = 1$$

$$\therefore y = p + 1$$

$$r = p - 1$$

पहले समीकरण में इन अर्थांशों का आदेश करने से

$$(p+1)^2 + (p-1)^2 = 46$$

$$2[p^2 + 6p^2 + 1] = 46$$

$$p^2 + 6p^2 - 29 = 0$$

$$(p^2 + 9)(p^2 - 3) = 0$$

$$p^2 = -9 \text{ अथवा } 3$$

$$\therefore p = \pm 3 \text{ अथवा } \pm \sqrt{3}$$

$$\text{अब } y = p + f$$

$$r = p - f$$

$$\text{और } f = 1$$

अतः यदि

$p = \sqrt{3}$	तो $y = \sqrt{3} + 1$	$r = \sqrt{3} - 1$
$p = -\sqrt{3}$	तो $y = -\sqrt{3} + 1$	$r = -\sqrt{3} - 1$
$p = 3$	तो $y = 3 + 1$	$r = 3 - 1$
$p = -3$	तो $y = -3 + 1$	$r = -3 - 1$

८.५ इन साधित उदाहरणों से विभिन्न युक्तियों  
 १ बोध होता है, जो समीकारों के साधन में सहायक  
 गी—

उदाहरण १— साधन करो—

$$य^2 + यर + र^2 = २१ \dots\dots\dots(१)$$

$$य + \sqrt{यर} + र = ७ \dots\dots\dots(२)$$

$$\text{अब } य^2 + र^2 + यर = (य + र)^2 - यर \\ = (य + र - \sqrt{यर}) (य + र + \sqrt{यर})$$

अर्थात्

$$२१ = (य + र - \sqrt{यर}) ७$$

[ (१) और (२) की सहायता से

$$\therefore य + र - \sqrt{यर} = ३ \dots\dots\dots(३)$$

$$\text{और } य + र + \sqrt{यर} = ७ \dots\dots\dots(२)$$

(३) और (२) का जोड़ करने से

$$य + र = ५ \dots\dots\dots(४)$$

अतः (२) में (य + र) की अर्हा का आदेश करने से

$$यर = ४ \dots\dots\dots(५)$$

(४) और (५) का साधन करने पर

$$य = १ \quad र = ४ \quad \text{और } य = ४ \quad र = १$$

उदाहरण २— इन समीकारों का साधन करो—

$$(य + र)^3 + ६ (य - र)^3 = ५ (य^2 - र^2)^3 \dots\dots(१)$$



$$१३य + १८र = ७२ \dots\dots\dots(२)$$

[मद्रास १९००]

समीकार (१) का  $(य-र)^{\frac{१}{३}}$  से आदि से अन्त तक भाजन करने पर

$$\left(\frac{य+र}{य-र}\right)^{\frac{१}{३}} + ६ = ५ \left(\frac{य+र}{य-र}\right)^{\frac{१}{३}} \text{ प्राप्त होता है।}$$

$$\left(\frac{य+र}{य-र}\right)^{\frac{१}{३}} = \text{ल रखो}$$

∴ उक्त समीकार  $ल^३ + ६ = ५ल$  में परिवर्तित होता है।

$$ल^३ - ५ल + ६ = ०$$

$$\therefore ल = २ \text{ अथवा } ३$$

$$\therefore \frac{य+र}{य-र} = ८ \text{ अथवा } २७$$

$$(१) \quad \frac{य+र}{य-र} = ८ \text{ लो।}$$

इससे  $७य - ९र = ०$  प्राप्त होता है।

अथ समीकार (२)

$१३य + १८र = ७२$  की सहायता से

$$य = \frac{८}{३} \text{ और } र = \frac{१६}{२७} \text{ प्राप्त होते हैं।}$$

$$\therefore य = २\frac{२}{३} \text{ और } र = २\frac{२}{३}$$

$$(2) \quad \frac{y+r}{y-r} = 2\frac{1}{2} \text{ लो}$$

इससे  $26y - 25r = 0$  प्राप्त होता है।

अब समीकार (2)

$$13y + 15r = 92 \text{ की सहायता से}$$

$$y = 2\frac{1}{2} \text{ और } r = 2\frac{1}{2} \text{ प्राप्त होते हैं।}$$

$$\text{अतः } y = 2\frac{1}{2}, \quad r = 2\frac{1}{2} :$$

$$y = 2\frac{1}{2}, \quad r = 2\frac{1}{2}$$

उदाहरण ३— साधन करो—

$$\frac{y^3 + r^3}{(y+r)^2} + \frac{y^3 - r^3}{(y-r)^2} = \frac{43y}{8} \dots\dots\dots(1)$$

$$4y - 9r = 8 \dots\dots\dots(2)$$

अब

$$y^3 + r^3 = (y+r)^3 - 3yr(y+r)$$

$$y^3 - r^3 = (y-r)^3 + 3yr(y-r)$$

रखने से समीकार (1)

$$y+r - \frac{3yr}{y+r} + y-r + \frac{3yr}{y-r} = \frac{43y}{8}$$

में परिवर्तित होता है।

$$3yr \left[ \frac{1}{y-r} - \frac{1}{y+r} \right] = \frac{43y}{8} - 2y$$

$$\frac{3y^2 \times 2r}{y^2 - r^2} = \frac{20y}{4}$$

अतः  $y=0$  अथवा  $\frac{6r^2}{y^2 - r^2} = \frac{20}{4}$

$$\text{अर्थात् } 16r^2 = 5(y^2 - r^2)$$

$$24r^2 = 5y^2$$

$$r = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} y$$

(फ) यदि  $y=0$  तो  $r = -\frac{4}{3}$  [समीकरण (२) से]

(ख) (२) में  $r = \frac{2}{\sqrt{5}} y$  रखने से

$$4y - 9 \times \frac{2}{\sqrt{5}} y = 4 \text{ प्राप्त होता है।}$$

अथवा  $y=4$  अतः  $r=2$

(ग)  $r = -\frac{2}{\sqrt{5}} y$  रखने से

$$4y + 9 \times \frac{2}{\sqrt{5}} y = 4$$

$$24y + 21y = 20$$

$$45y = 20$$

$$168$$

$$y = \frac{10}{23} \quad \therefore r = -\frac{3}{23}$$

$$y = 0 \quad r = -\frac{8}{9}$$

$$y = 4 \quad r = 3$$

$$y = \frac{10}{23} \quad r = -\frac{6}{23}$$

## प्रश्नावलि १२

निम्न-लिखित समीकरणों का साधन करो—

- (१)  $y + r = 3$   
 $2y^2 - 4yr + 2r^2 = 0$  [फलकत्ता १९२०]
- (२)  $4y + 2r = 12$   
 $2y^2 + 3yr + r^2 = 14$  [फलकत्ता १८८८]
- (३)  $3y + 4r = 4$   
 $y^2 + r^2 = 1$  [फलकत्ता १९२२]
- (४)  $2y + 3r + 4 = 0$   
 $2y^2 - 3yr + 4r^2 = 24$  [मैसोट १९१७]
- (५)  $y^2 + r^2 + y - r = 22$   
 $y + r = 6$  [इलाहाबाद १९१०]

$$(६) \frac{१}{य} + \frac{१}{र} = \frac{१}{२}$$

$$य + र = ९$$

[कलकत्ता १९३६]

$$(७) य + र = \frac{५}{६}$$

$$\frac{१}{य} - \frac{१}{र} = १$$

[कलकत्ता १९३७]

$$(८) \sqrt{य} + \sqrt{र} = \frac{५}{३}$$

$$य + र = १०$$

[कलकत्ता १९३८]

$$(९) यर + य + र = २७$$

$$\frac{१}{य} + \frac{१}{र} = \frac{१}{२}$$

[कलकत्ता १९३९]

$$(१०) य + र + \sqrt{(य + २)(र + ३)} = ३४$$

$$(य + २)^२ + (र + ३)^२ + (य + २)(र + ३) = ७३१$$

[शलाहाबाद १९२८]

$$(११) \frac{य^२}{र} + \frac{र^२}{य} = १८$$

$$य + र = १२$$

[कलकत्ता १९१९]

$$(१२) २य^२ + ३यर + र^२ = २०$$

$$५य^२ + ४र^२ = ४१$$

[कलकत्ता १८९२]

$$(१३) य^२ + र^२ + १७ = ५यर$$

$$२य^२ + ३र^२ = ३५$$

[मद्रास १८९२]

$$(१४) ४य^२ - यर + र^२ = १६$$

$$३य^२ - २यर + र^२ = ८$$

[पंजाब १९१०]

$$(१५) ४य^२ + ३यर + १८र^२ = २०$$

$$४य^२ + यर = १०$$

[मद्रास १८९७]

$$(१६) य^४ + य^२ र^२ + य^४ = १३३$$

$$य^२ - यर + र^२ = ७$$

[इलाहाबाद १९०२]

$$(१७) ६य^२ - ५यर - ६र^२ + ३य + २र = ०$$

$$१०य^२ - ९यर + २र^२ - ९य - ५र - ७ = ०$$

[इलाहाबाद १९२६]

$$(१८) य - र = २$$

$$य^४ + र^४ = ८२$$

$$(१९) य + र = ६$$

$$य^४ + र^४ = ६२६$$

$$(२०) य - र = २$$

$$य^४ - र^४ = २४२$$

$$(२१) य - र = २$$

$$य^४ - र^४ = २१८$$

[कलकत्ता १९१७]

$$(२२) य + \frac{४}{र} = १$$

$$र + \frac{४}{य} = २५$$

[कलकत्ता १९२०]

$$(२३) \quad y + yr = ३$$

$$r + yr = ४$$

[कलकत्ता १९२१]

$$(२४) \quad y + r + ३\sqrt{y+r} = y^2 + r^2 = १०$$

[नागपुर १९२५]

$$(२५) \quad \frac{y^2}{r^2} + \frac{r}{y} + \frac{y}{r} = \frac{२७}{४} - \frac{r^2}{y^2}$$

$$y - r = २$$

[कलकत्ता १८६५]

$$(२६) \quad ६y + ५r = \frac{६}{y} + \frac{५}{r} + २९\frac{३}{४}$$

$$३y + ४r = \frac{३}{y} + \frac{४}{r} + १८\frac{३}{४}$$

[मद्रास १८८८]

$$(२७) \quad \frac{y^2 + r^2}{yr} + y^2 + r^2 = १३\frac{३}{४}$$

$$\frac{yr}{y^2 + r^2} + yr = ३\frac{३}{४}$$

[कलकत्ता १९०३]

$$(२८) \quad y^2 + २y^2r + y^2r^2 + २r^2y + r^4 = ४१$$

$$\frac{y}{r} + \frac{r}{y} = \frac{५}{२}$$

[कलकत्ता १८९१]

$$(२९) \quad y^2 + yr + y = १४$$

$$r^2 + yr + r = २८$$

[मद्रास १९२२]

$$(३०) \quad (y+r)^{\frac{३}{२}} + २(y-r)^{\frac{३}{२}} = ३(y^2 - r^2)^{\frac{३}{२}}$$

$$३y - २r = १३$$

## तृतीय भाग (तीन अज्ञात)

८.६ जिन समीकारों में तीन या अधिक अज्ञात राशियां होती हैं उनका साधन केवल विशेष दशांशों में हो सकता है। निम्न-लिखित अनुच्छेदों में कुछ समीकारों का साधन किया गया है।

८.६१ दो समानघाती रेखीय समीकार और तीसरा कोई भी उच्चतर घातीय—

उदाहरण— साधन करो—

$$य + र - ल = ०$$

$$५य + ३र - ४ल = ०$$

$$४य^२ + ८र^२ + ६ल^२ = ३६$$

प्रथम दो समीकारों से, तिर्यग् गुणन करने पर

$$\frac{य}{१} = \frac{र}{१} = \frac{ल}{२} = क \quad (\text{मान लो}) \quad \text{प्राप्त होते हैं।}$$

$$\therefore य = क, र = क, ल = २क$$

क के पदों में य, र, ल की इन अर्थांशों का तृतीय समीकार में आदेश करने पर

$$४क^२ + ८क^२ + २४क^२ = ३६$$

$$३६क^२ = ३६$$

$$क = \pm १$$



यदि $k=1$	तो $y=1$	$r=1$	$l=2$
और $k=-1$	तो $y=-1$	$r=-1$	$l=2$

८६२ उदाहरण— साधन करो—

$$y + r + l = 6 \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 + r^2 + l^2 = 13 \dots\dots\dots (2)$$

$$rl = 6 \dots\dots\dots (3)$$

(२) और (३) से निम्न लिखित समीकार प्राप्त होता है

$$y^2 + r^2 + l^2 + 2rl = 13 + 12$$

$$y^2 + (r+l)^2 = 25 \dots\dots\dots (4)$$

अब  $(r+l)=p$  रखने पर समीकार (१) और (४)

$$y + p = 6$$

$$y^2 + p^2 = 25 \text{ में परिचित होते हैं।}$$

$$y^2 + p^2 = (y+p)^2 - 2yp$$

$$25 = 36 - 2yp$$

$$2yp = 11$$

$$\text{अब } (y-p)^2 = (y+p)^2 - 4yp$$

$$= 36 - 20$$

$$= 16$$

$$\therefore y-p = \pm 4$$

(क)

$$य + प = ६$$

तथा  $य - प = ४$  लेने से

$य = ५, प = १$  प्राप्त होते हैं।

$$\text{अब } र + ल = १$$

$$\text{तथा } र - ल = ६$$

$$(र - ल)^2 = (र + ल)^2 - ४रल$$

$$= १ - २४$$

$$= -२३$$

$$\therefore र - ल = \pm \sqrt{-२३}$$

इसको  $र + ल = १$  से सम्मिश्र करने पर

$$र = \frac{१ + \sqrt{-२३}}{२}, \quad ल = \frac{१ - \sqrt{-२३}}{२}$$

$$र = \frac{१ - \sqrt{-२३}}{२}, \quad ल = \frac{१ + \sqrt{-२३}}{२}$$

(ख) अब  $य - प = -४$  लो।

$$\text{और } य + प = ६$$

$$\therefore य = १ \quad \text{और } प = ५$$

$$\therefore र + ल = ५ \quad \text{और } र - ल = ६$$

$$र - ल = \pm १$$

$$\therefore र + ल = ५$$

$$र + ल = ५$$

$$र - ल = १$$

$$र - ल = -१$$

$$\therefore र = ३$$

$$ल = २$$

$$र = २$$

$$ल = ३$$

$$\therefore \begin{array}{lll} y=1 & r=3 & l=2 \\ y=1 & r=2 & l=3 \end{array}$$

८.७ उदाहरण १— साधन करो—

$$y^2 + yr + yl = 4 \dots\dots\dots (1)$$

$$r^2 + rl + ry = 64 \dots\dots\dots (2)$$

$$l^2 + ly + lr = -36 \dots\dots\dots (3)$$

इन समीकारों को इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$y(y+r+l) = 4$$

$$r(y+r+l) = 64$$

$$l(y+r+l) = -36$$

सब समीकारों को जोड़ने से

$$(y+r+l)^2 = 36 \text{ प्राप्त होता है।}$$

$$\text{अथवा } y+r+l = \pm 6 \dots\dots\dots (4)$$

समीकार (4) से क्रमशः (1), (2) और (3) का भाजन करने पर

$$y = \frac{4}{3} \quad r = \frac{32}{3} \quad l = -6$$

$$\text{और } y = -\frac{4}{3} \quad r = -\frac{32}{3} \quad l = 6 \text{ प्राप्त होते हैं।}$$

यह उदाहरण अगले उदाहरण की एक विशेष दशा है।

उदाहरण २— साधन करो—

$$य (टय + ठर + डल) = त \dots\dots\dots (१)$$

$$र (टय + ठर + डल) = थ \dots\dots\dots (२)$$

$$ल (टय + ठर + डल) = द \dots\dots\dots (३)$$

समीकार (१), (२) (३) को क्रमशः ट, ठ, ड से गुणा करने और जोड़न पर

$$(टय + ठर + डल)^२ = टत + ठथ + डद$$

$$\therefore टय + ठर + डल = \pm \sqrt{टत + ठथ + डद} \dots\dots\dots (४)$$

अब समीकार (४) से, (१), (२), (३) का भाजन करने पर

$$य = \frac{त}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$र = \frac{थ}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$ल = \frac{द}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$\text{और } य = - \frac{त}{\sqrt{टत + ठथ + डद}}$$

$$र = - \frac{य}{\sqrt{रत + ठय + डद}}$$

$$ल = - \frac{द}{\sqrt{रत + ठय + डद}}$$

८७१ उदाहरण— साधन करो—

$$(र-ल) (ल+य) = २२ \dots\dots\dots (१)$$

$$(ल+य) (य-र) = ३३ \dots\dots\dots (२)$$

$$(य-र) (र-ल) = ६ \dots\dots\dots (३)$$

सब समीकारों का एक साथ गुणन करने पर

$$(य-र)^२ (र-ल)^२ (ल+य)^२ = २२ \times ३३ \times ६ \text{ प्राप्त होता है}$$

$$\text{अर्थात् } (य-र) (र-ल) (ल+य) = \pm ६६ \dots\dots\dots (४)$$

अब समीकार (५) से, (१), (२) (३) का भाजन करने पर

$$(क) र-ल = २$$

$$ल+य = ११$$

$$य-र = ३$$

$$(ख) र-ल = -२$$

$$ल+य = -११$$

$$य-र = -३$$

(क) के समीकारों का साधन करने से

$$य = ८, र = १, ल = ३$$

और (ख) के समीकारों का साधन करने से

$$\begin{array}{lll} \text{य} = -८, & \text{र} = -५, & \text{ल} = -३ \\ \text{अतः य} = ८, & \text{र} = ५, & \text{ल} = ३ \\ \text{और य} = -८, & \text{र} = -५, & \text{ल} = -३ \end{array}$$

८.७२ उदाहरण— साधन करो—

$$\text{य}^2 - \text{रल} = ५ \quad \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{र}^2 - \text{लय} = ३ \quad \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{ल}^2 - \text{यर} = -१ \quad \dots\dots\dots (३)$$

समीकार (१), (२), (३) को क्रमशः र, ल और य से गुणा करने पर और तीनों को जोड़कर सरल करने पर

$$५\text{र} + ३\text{ल} - \text{य} = ० \quad \dots\dots\dots (४)$$

प्राप्त होता है।

समीकार (१), (२), (३) को क्रमशः ल, य, और र से गुणा करने पर और तीनों को जोड़कर सरल करने पर

$$५\text{ल} + ३\text{य} - \text{र} = ० \quad \dots\dots\dots (५)$$

प्राप्त होता है।

अब समीकार (४) और (५) अर्थात् ,

$$\text{य} - ५\text{र} - ३\text{ल} = ०$$

$$३\text{य} - \text{र} + ५\text{ल} = ० \quad \text{से तिर्यग् गुणन से}$$

$$\frac{\text{य}}{-२} = \frac{\text{र}}{-१} = \frac{\text{ल}}{१} = \text{क (मान लो)}$$

$$\therefore \text{य} = -२\text{क}$$

$$r = -k$$

$$l = k$$

य, र, ल की इन अर्थाओं का (१), (२), (३) में से किसी एक में आदेश करने से

$$k^2 = 1$$

अर्थात्  $k = \pm 1$  प्राप्त होता है।

$$\therefore k = 1 \text{ लेने से } y = -2 \quad r = -1 \quad l = 1$$

और  $k = -1$  लेने से  $y = 2 \quad r = 1 \quad l = -1$   
प्राप्त होते हैं

उदाहरण २— साधन करो—

$$r^2 + rl + l^2 = 7 \dots\dots\dots (1)$$

$$l^2 + ly + y^2 = 13 \dots\dots\dots (2)$$

$$y^2 + yr + r^2 = 19 \dots\dots\dots (3)$$

[इलाहाबाद १९२६]

(२) में से (१) को घटाने पर

$$y^2 r^2 + l(y - r) = 6$$

$$(y - r)(y + r + l) = 6 \dots\dots\dots (4)$$

(३) में से (१) को घटाने पर

$$y^2 - l^2 + r(y - l) = 12$$

$$(y - l)(y + r + l) = 12 \dots\dots\dots (5)$$

(५) का (४) से भाजन करने पर

$$\frac{y-l}{y-r} = 2$$

$y = 2r - l$  प्राप्त होता है।

$y$  की इस मर्यादा का (२) तथा (३) में आदेश करने पर  
 $4r^2 + l^2 - 2rl = 13 \dots\dots\dots (६)$

$$7r^2 + l^2 - 4rl = 19 \dots\dots\dots (७)$$

प्राप्त होते हैं।

$r = k \times l$  रखो और (६) का (७) से भाजन करो।

$$\therefore \frac{4k^2 + 1 - 2k}{7k^2 + 1 - 4k} = \frac{13}{19}$$

$$4k^2 - 9k - 2 = 0$$

$$k = 2, \quad -\frac{1}{4}$$

$k = 2$  लेने पर

$$r = 2l$$

(४) में  $r$  की इस मर्यादा का आदेश करने से

$$l = \pm 1 \text{ प्राप्त होता है}$$

$$\therefore \quad l = 1 \qquad r = 2 \qquad y = 3$$

$$l = -1 \qquad r = -2 \qquad y = -3$$

$$k = -\frac{1}{4} \text{ लेने पर}$$



∴  $r = -\frac{1}{\sqrt{3}}l$  होगा।

(५) मैं  $r$  की इस अर्धा का आदेश करने पर

$l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  प्राप्त होता है।

∴  $r = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$

और  $y = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः  $y, r, l$  की अर्धाओं के निम्न-लिखित कुलक प्राप्त होते हैं।

$$y = 1$$

$$r = 1$$

$$l = 1$$

$$y = -1$$

$$r = -1$$

$$l = -1$$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$r = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$l = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

८.८ उदाहरण— साधन करो—

$$y + r + l = 2$$

..... (१)

$$y^2 + r^2 + l^2 = 18$$

..... (२)

$$y^3 + r^3 + l^3 = 20$$

..... (३)

[इलाहाबाद १९२६]

(१) के वर्ग में से (२) को घटाने पर

$$यर + रल + लय = -५ \dots\dots\dots(४)$$

प्राप्त होता है।

अब यह ज्ञात है कि

$$य^3 + र^3 + ल^3 - ३यरल$$

$$= (य + र + ल) (य^2 + र^2 + ल^2 - यर - रल - लय)$$

(१), (२), (३) और (४) का प्रयोग करने से यह फल

$$२० - ३यरल = २ (१४ + ५) में परिवर्तित होता है।$$

$$\therefore ३यरल = -१८$$

$$यरल = -६ \dots\dots\dots(५)$$

$$अब य + र + ल = २ \dots\dots\dots(१)$$

$$यर + रल + यल = -५ \dots\dots\dots(४)$$

$$और यरल = -६ \dots\dots\dots(५)$$

समीकार (४) इस रूप में लिखा जा सकता है।

$$रल + य(र + ल) = -५$$

इसमें  $(र + ल)$  और  $रल$  के लिए (१) और (५) में से आदेश करने पर

$$-\frac{६}{य} + य(२ - य) = -५$$

$$य^3 - २य^2 - ५य + ६ = ०$$

$$\therefore य = १, ३, -२$$

य = १ लेने से समीकार (१) और (५) का प्रहसन क्रमशः

$$र + ल = १$$

$$रल = -६ में होना है।$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } (र - ल)^२ &= (र + ल)^२ - ४रल \\ &= १ + २४ \end{aligned}$$

$$\therefore र - ल = \pm ५$$

$$\text{अथ } र - ल = ५$$

$$\text{और } र + ल = १ \text{ लेने पर}$$

$$र = ३, ल = -२ \text{ प्राप्त होते हैं।}$$

$$\text{तथा } र - ल = -५$$

$$\text{और } र + ल = १ \text{ लेने पर}$$

$$र = -२, ल = ३ \text{ प्राप्त होते हैं।}$$

इसी प्रकार य की शेष अर्हापि लेने पर, र और ल की संवादी अर्हापि प्राप्त होंगी।

अतः य, र, ल की अर्हापि के ये फलक प्राप्त होते हैं—

य = १	र = -२	ल = ३
य = १	र = ३	ल = -२
य = -२	र = १	ल = ३
य = -२	र = ३	ल = १
य = ३	र = १	ल = -२
य = ३	र = -२	ल = १

## प्रश्नावलि १३

इन समीकरणों का साधन करो—

(१)  $y - 2r + l = 0$

$$12y - 29r + 12l = 0$$

$$2y^2 + 3r^2 + 4l^2 = 3\frac{1}{2}$$

[नागपुर १९२९]

(२)  $3y - 4r + 6l = 0$

$$6y + 2r - 4l = 0$$

$$y^2 + 4r^2 + 4l^2 = 220$$

(३)  $y + r + l = 9$

$$y^2 + r^2 + l^2 = 29$$

$$yr = 6$$

(४)  $y + r + l = 6$

$$y^2 + r^2 + l^2 = 14$$

$$rl = 6$$

[पटना १९३९]

(५)  $y + r + l = 1\frac{1}{2}$

$$yr + yl + rl = \frac{9}{25}$$

$$yrl = \frac{1}{25}$$

[इलाहाबाद १९२५]

$$(६) य^२ + यर + यल = ६$$

$$र^२ + रल + रय = १२$$

$$ल^२ + लय + लर = १८$$

$$(७) रल - र + ल = ५$$

$$लय + ल - य = १०$$

$$यर + य + र = २५$$

[नागपुर १९४१]

$$(८) यर + य + र = २३$$

$$यल + य + ल = ४१$$

$$रल + र + ल = २७$$

[नागपुर १९२५]

$$(९) यर + ५ (य + र) = ४७$$

$$रल + ५ (र + ल) = ६५$$

$$लय + ५ (ल + य) = ५५$$

[नागपुर १९२६]

$$(१०) यर + २ (य + र) = १६$$

$$रल + २ (र + ल) = ११$$

$$लय + २ (ल + य) = ८$$

[नागपुर १९३१]

$$(११) य + र + यर = ११$$

$$र + ल + रल = १९$$

$$ल + य + लय = १४$$

$$(१२) य^२ + र + ल = ३$$

$$र^२ + ल + य = ३$$

$$ल^२ + य + र = ३$$

[नागपुर १९४३]

$$(१३) य^२ + य(र + ल) + रल = ५६$$

$$र^२ + र(ल + य) + लय = ६३$$

$$ल^२ + ल(य + र) + यर = ७२$$

$$(१४) \quad र^२ + ल^२ = क + (र + ल)$$

$$ल^२ + य^२ = ख + (ल + य)$$

$$य^२ + र^२ = ग + (य + र)$$

[नागपुर १९४५]

$$(१५) \quad य(र + ल - य) = क$$

$$र(ल + य - र) = ख$$

$$ल(य + र - ल) = ग$$

[नागपुर १९४६]

$$(१६) \quad य^२ - रल = १६$$

$$र^२ - लय = -१४$$

$$ल^२ - यर = १$$

[नागपुर १९३९]

$$(१७) \quad य^२ - रल = त$$

$$र^२ - लय = ध$$

$$ल^२ - यर = द$$

$$(१८) \quad य(र + ल) = ५$$

$$र(य + ल) = ८$$

$$ल(य + र) = ९$$

[कलकत्ता १९३८]

$$(१९) \quad \text{यदि } \frac{य}{ख + ग - क} = \frac{र}{ग + क - ख} = \frac{ल}{क + ख - ग} \text{ तो}$$

सिद्ध करो कि

$$(क + ख + ग) (रल + लय + यर)$$

$$= (य + ग + ल) (कय + लर + गल)$$

[पटना १९३९]

$$(२०) \quad यल + र = ७ल$$

$$रल + य = ८ल$$

$$य + र + ल = १२$$

[कलकत्ता १९३२]

$$(२१) \quad य + र + ल = ०$$

$$य^२ + र^२ + ल^२ = १४$$

$$य^३ + र^३ + ल^३ = -१८$$

[इलाहाबाद १९२४]

$$(२२) \quad य + र + ल = ६$$

$$य^२ + र^२ + ल^२ = १५$$

$$य^३ + र^३ + ल^३ = ३६$$

[नागपुर १९३८]

$$(२३) \quad र^२ + रल + ल^२ = ४९$$

$$ल^२ + लय + य^२ = १९$$

$$य^२ + यर + र^२ = ३९$$

[इलाहाबाद १९२१]

## नवां अध्याय

### क्रमचय और संचय

(permutation and combination)

९.१ कोई विषय जिसपर गणना की दृष्टि से विचार किया जा सकता है, अंकीय अथवा योजीय अनुसंधान-क्षेत्र के अन्तर्गत आ सकता है। वस्तुओं का चुनाव (selection) और विन्यास (arrangement) ऐसा ही एक विषय है। जिन कार्यों में, चुनाव अथवा विकल्पों (alternatives) के संयोजन की संभावना होती है, उनपर इस विषय के सिद्धान्त लागू होते हैं।

क, ख, ग, तीन अक्षरों में से दो के चुनाव की समस्या पर विचार करो। विभिन्न संभाव्य चुनाव (क, ख), (ख, ग), और (क, ग) हैं। अतः दो अक्षरों का चुनाव तीन प्रकार से हो सकता है।

किसी एक प्रकार से अक्षरों का चुनाव करने के उपरान्त उनका विभिन्न प्रकारों से विन्यास करने की समस्या पर ध्यान दो। समूह (क, ख) पर विचार करो। ये दो अक्षर (क, ख) अथवा (ख, क) के रूप में विन्यस्त किए जा सकते हैं। इसलिए क और ख इन दो अक्षरों का विन्यास दो प्रकार से हो



सकता है। यह भली भाँति समझ लेना चाहिए कि वस्तुओं के विन्यास पर विचार करते समय, जिस क्रम में वे रखी जाती हैं उसका विशेष महत्त्व हो जाता है। किन्तु चुनाव करते समय वस्तुएं जिस क्रम में ली जाती हैं उसपर ध्यान देना आवश्यक नहीं होता। समूह (क, ख) पर विचार करो। इसमें पहले क फिर ख अथवा पहले ख फिर क के चुनाव किए जा सकते हैं। इससे एक ही संयोजन हो सकता है जो (क, ख) अथवा (ख, क) इस प्रकार लिखा जा सकता है।

ये इस विषय की दो विशेष समस्याएं हैं। गणित में चुनाव को संघय (combination) और विन्यस्त चुनाव को क्रमचय (permutation) कहते हैं। दत्त वस्तुओं में से कुछ अथवा सब वस्तुओं को लेने से बननेवाला प्रत्येक समूह अथवा चुनाव संघय कहलाता है और संघय में की वस्तुओं का विन्यास क्रमचय कहलाता है।

९.२ साध्य— यदि एक क्रिया  $m$  प्रकारों से की जा सकती हो और (इनमें से किसी भी प्रकार इसको करने पर) दूसरी क्रिया  $n$  प्रकारों से की जा सकती हो तो, दोनों क्रियाओं को करने के प्रकारों की संख्या  $m \times n$  होगी।

मान लो प्रथम क्रिया किसी विशेष प्रकार से की गई है। इसे करने के पश्चात् दूसरी क्रिया  $n$  भिन्न भिन्न प्रकारों से की जा सकती है। इसी प्रकार प्रथम क्रिया को करने के प्रकारों में से प्रत्येक प्रकार के लिए दूसरी क्रिया करने के भिन्न भिन्न प्रकार 'न' हैं। किन्तु प्रथम क्रिया करने के प्रकार  $m$  हैं। अतः दोनों क्रियाओं को करने के प्रकार  $m \times n$  हैं।

उदाहरण— ८ प्रतिस्पर्धियों को, २ पुरस्कार कितने प्रकार से दिए जा सकते हैं ?

पहला पुरस्कार ८ विभिन्न प्रकारों से दिया जा सकता है। एक बार इस पुरस्कार के दिए जाने पर ७ प्रतिस्पर्धी रह जाते हैं, जिनमें से किसी को भी दूसरा पुरस्कार दिया जा सकता है। अतः दूसरा पुरस्कार ७ भिन्न भिन्न प्रकारों से दिया जा सकता है। अब पहला पुरस्कार किसी एक प्रकार से दिए जाने पर दूसरा पुरस्कार ७ विभिन्न प्रकारों से दिया जा सकता है। किन्तु पहला पुरस्कार देने के ८ प्रकार हैं। अतः दोनों पुरस्कार  $8 \times 7 = 56$  प्रकारों से दिए जा सकते हैं।

६.३ 'स' असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक बार 'न' वस्तुएं लेने से प्राप्त, क्रमचयों की संख्या निकालना।

इनकी संख्या निकालना अथवा 'न' रिक्त स्थानों को दत्त स असमरूप (विजातीय) वस्तुओं से भरने के प्रकारों की संख्या निकालना, एक ही बात है।

पहला स्थान 'स' विभिन्न प्रकारों से भरा जा सकता है क्योंकि वह स वस्तुओं में से किसी भी एक से भरा जा सकता है। पहले स्थान के किसी भी एक प्रकार से भरे जाने पर दूसरा स्थान (स-१) प्रकारों से भरा जा सकता है, क्योंकि केवल (स-१) वस्तुएं शेष हैं।

अब पहले स्थान को भरने के प्रत्येक प्रकार के लिए दूसरे स्थान को भरने के (स-१) प्रकार हैं। इसलिए प्रथम दो स्थान कुल स (स-१) प्रकारों से भरे जा सकते हैं।

अब प्रथम दो स्थानों के भरने के प्रत्येक प्रकार के लिए तीसरा स्थान भरने के (स-२) प्रकार हैं। अतः प्रथम तीन स्थान कुल स (स-१) (स-२) प्रकारों से भरे जा सकते हैं  
अवलोकन करो कि

(१) प्रत्येक प्रक्रम (stage) में खण्डों की संख्या भरे गए स्थानों की संख्या के सम है।

(२) प्रत्येक खण्ड अपने पूर्वगामी (preceding) खण्ड की अपेक्षा एक कम है।

अतः इन न स्थानों को भरने के कुल प्रकार

$$= \text{स (स-१) (स-२) ..... न खण्डों तक}$$

$$\text{अथवा} = \text{स (स-१) (स-२) ..... (स-न-१)}$$

अतः स असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक बार न वस्तुएं लेने पर प्राप्त होनेवाले क्रमचयों की अपेक्षित संख्या स (स-१) (स-२) ..... (स-न+१) है।

सभी स वस्तुओं को एक साथ लेने पर क्रमचयों की संख्या स (स-१) ..... स खण्डों तक अथवा स(स-१) .....  $३ \times २ \times १$  है।

इस गुणनफल का अभिधान सदैव स अथवा स! प्रतीक से किया जाता है और उसे "एत स" पढ़ते हैं। भविष्य में स वस्तुओं में से प्रत्येक बार न वस्तुएं लेने पर होनेवाले क्रमचयों की संख्या का अभिधान संक्रम प्रतीक से किया जायगा।

$$\therefore \text{संक्रम} = \text{स (स-१) (स-२) ... (स-न+१)}$$

$$\text{तथा संक्रम} = \text{स (स \times १) (स-२) ... ३ \times २ \times १}$$

$$= \text{स}.$$

संख्यात्मक प्रश्नों का साधन करते समय यह ध्यान में रखना उचित है कि प्रतीक संकेत में 'स' दी गई वस्तुओं का और पादांक न प्रयुक्त सूत्र में खण्डों की संख्या का अभिधान करता है।

उदाहरण १— १, २, ३, ..... ९ इन नौ अंकों में से प्रत्येक चार ४ अंक लेने पर कितनी भिन्न संख्याएँ प्राप्त होंगी ?

यहाँ ९ भिन्न वस्तुएँ हैं और ९ वस्तुओं में से चार, चार करके प्रत्येक चार ली गई वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या निकालना है।

$$\begin{aligned}\text{अतः अपेक्षित फल} &= {}^9P_4 \\ &= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \\ &= 3024\end{aligned}$$

उदाहरण ५— 'परदेशगमन' शब्द के अक्षरों से कितने विभिन्न शब्द बन सकते हैं ?

यहाँ ७ भिन्न अक्षर हैं और इन ७ अक्षरों के विन्यास के विभिन्न प्रकार निकालना है।

अतः प्रकारों की अपेक्षित संख्या \*क्र. होगी।

$$\begin{aligned}\therefore \text{विभिन्न प्रकारों की संख्या} \\ &= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040\end{aligned}$$

अतः ५०४० विभिन्न शब्द बन सकते हैं।

९.४ 'स' असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक चार ४ वस्तुएँ लेने पर प्राप्त होने वाले संचयों की संख्या निकालना यदि संचयों की संख्या का अभिधान सूत्र से किया जाय तो स वस्तुओं में से प्रत्येक चार न वस्तुएँ चुनने

गचन प्रकार होंगे। इनमें से प्रत्येक चुनाव में न वस्तुएं परस्पर गक्रन प्रकारों से विन्यस्त की जा सकती हैं। अतएव स वस्तुओं में से न वस्तुओं का चुनाव और इन को परस्पर विन्यस्त करने के कुल प्रकार गक्रन  $\times$  गचन है। इनकी संख्या 'स' असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक बार 'न' वस्तुएं लेने पर प्राप्त होने वाले क्रमचयों की संख्या के सम है।

$$\text{अतः गक्रन} \times \text{गचन} = \text{गक्रन}$$

$$\text{किन्तु गक्रन} = \text{स}(\text{स}-1)(\text{स}-2) \dots (\text{स}-\text{n}+1)$$

$$\text{गक्रन} = \text{n}(\text{n}-1)(\text{n}-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

$$\text{अतः गचन} = \frac{\text{स}(\text{स}-1)(\text{स}-2) \dots (\text{स}-\text{n}+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots (\text{n}-1) \times \text{n}}$$

यह देखना चाहिए कि फल के भिन्नीय रूप में होते हुए भी परिभाषानुसार गचन पूर्णांक है।

९.२१ गचन की उक्त अर्था दूसरे रूप में भी लिखी जा सकती है।

$$\text{जैसे गचन} = \frac{\text{स}(\text{स}-1)(\text{स}-2) \dots (\text{स}-\text{n}+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots \text{n}} \quad (1)$$

अंश और हर को स-न से गुणा करने पर

$$\text{गचन} = \frac{\text{स}(\text{स}-1)(\text{स}-2) \dots (\text{स}-\text{n}+1) \text{स}-\text{n}}{1 \times 2 \times 3 \dots \text{n} \times \text{स}-\text{n}}$$

$$= \frac{\text{स}}{\text{n} \text{ स}-\text{n}} \dots \dots \dots (2)$$

प्राप्त होता है।

पहिले रूप की अपेक्षा सचन को दूसरे रूपमें व्यक्त करना अधिक प्रचलित है।

१० का निर्वचन—

सूत्र (२) में  $n = स$  रखने पर

$$सचस = \frac{स}{स} \quad ० = \frac{१}{०} \quad \text{प्राप्त होता है।}$$

किन्तु सचस सभी एक साथ ली गई स वस्तुओं के संचयों का पर्यायवाची है। ऐसा संचय केवल एक है।

$$\therefore सचस = १$$

अतः समता का रूपान्तरण

$$१ = \frac{१}{०} \quad \text{में होता है।}$$

उक्त समता के लिए  $०$  की अर्धा १ होनी चाहिए।

$$\text{अतः } ० = १$$

९.४२ आगे लिखे सम्बन्धों को ध्यानपूर्वक समझना चाहिए—

$$१६ = १६ \times १५ \quad १४$$

$$१० = \frac{१६}{१६ \times १५ \times \dots \times ११}$$

$$न = न(न-१) \quad न-२$$

$$= न (न-१) (न-२) \dots (न-त) \quad न-त-१$$

९.४३ ये सत्र महत्वपूर्ण हैं।

(१)  $s_n = s_{n-1}$

(२)  $s_n + s_{n-1} = s + s_n$

इन्हें इन रीतियों से सिद्ध किया जायगा।

$$(१) \text{ अथ } s_{n-1} = \frac{s}{s - (s - n)}$$

[अनुच्छेद ९.४१ के अनुसार]

$$= \frac{s}{s - n}$$

$$= s_n$$

$s_n = s_{n-1}$  इस फल को शब्दों में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है—  $s$  भिन्न वस्तुओं में से प्रत्येक वस्तु वस्तुएं लेनेपर संभाव्य संख्या की संख्या, इन्हीं  $s$  वस्तुओं में से प्रत्येक वस्तु  $(s - n)$  वस्तुएं लेने पर संभाव्य संख्या की संख्या के सम होता है।

ऐसे संख्या संपूरक (complementary) संख्या कहलाते हैं।

इसको प्रत्यक्ष रीति से भी सिद्ध किया जा सकता है।  $s$  वस्तुओं में से  $n$  वस्तुएं लेने के प्रत्येक चुनाव में  $(s - n)$  वस्तुएं छूट जाती हैं, अर्थात्  $s$  वस्तुओं में से  $n$  वस्तुओं के प्रत्येक संख्या के लिए इन्हीं  $s$  वस्तुओं में से  $(s - n)$  वस्तुओं का एक संख्या बनता है।

∴  $s$  वस्तुओं में से  $n$  वस्तुओं के संख्या की संख्या,

'स' में से (स-न) वस्तुओं के संचयों की संख्या के समान है।

(2)  $s_n + s_{n-1}$  पर विचार करो।

$$s_n + s_{n-1}$$

$$= \frac{s}{n | s-n} + \frac{s}{n-1 | s-n+1}$$

$$= \frac{s}{n-1 | s-n} \left[ -\frac{1}{n} + \frac{1}{s-n+1} \right]$$

$$= \frac{s}{n-1 | s-n} \times \frac{(s-n+1+n)}{n (s-n+1)}$$

$$= \frac{(s+1) s}{n | n-1 (s-n+1) | s-n}$$

$$= \frac{s+1}{n | s+1-n}$$



$$= {}^{n+1}C_n$$

उदाहरण १—  ${}^{11}C_9$  की अर्था निकालो ।

यह ज्ञात है कि  ${}^nC_n = {}^nC_{n-n}$

$$\therefore {}^{11}C_9 = {}^{11}C_{11-9}$$

$$= {}^{11}C_2$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3}$$

$$= 165$$

उदाहरण २— ८ व्यक्तियों में से किन्हीं तीन को चुनना है । यह कितने प्रकारों से किया जा सकता है और एक विशेष व्यक्ति कितनी बार चुना जायगा ?

पहले ८ में से तीन व्यक्तियों को चुनना है । यह  ${}^8C_3$  प्रकारों से किया जा सकता है ।

अतः तीन व्यक्तियों को चुनने के समस्त प्रकार

$$\frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 165 \text{ हैं ।}$$

अतः ८ व्यक्तियों में से तीन को चुनने के 165 प्रकार हैं ।

अब उन प्रकारों की संख्या निकालना है जिनमें एक निर्दिष्ट व्यक्ति सदा लिया जायगा । इस व्यक्ति को समूह में रखकर शेष ७ व्यक्तियों में से केवल २ को चुनना चाहिए । यह  ${}^7C_2$  अर्थात् २१ प्रकारों से किया जा सकता है । इससे

उन प्रकारों की संख्या प्राप्त होती है जिनमें एक निर्दिष्ट व्यक्ति का चुनाव सदा होगा।

उदाहरण ३— ८ मनुष्य और ५ स्त्रियों में से ७ व्यक्तियों की समिति कितने प्रकारों से बनाई जा सकती है जिसमें (१) ३ स्त्रियां हों, (२) कम से कम ३ स्त्रियां हों।

(१) ५ स्त्रियों में से ३ स्त्रियों का 'च<sub>३</sub>' प्रकारों से चुनाव किया जा सकता है। इस के उपरान्त समिति के शेष ४ सदस्यों का चुनाव ८ मनुष्यों में से 'च<sub>४</sub>' प्रकारों से किया जा सकता है।

अतः ७ सदस्यों की समिति बनाने के प्रकारों की संख्या

$$= {}^1\text{च}_3 \times {}^1\text{च}_4 \\ = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 700$$

(२) समिति में कम से कम ३ स्त्रियां रहनी चाहिएं। अतः उसमें ३, ४ अथवा ५ स्त्रियां भी रह सकती हैं। इसलिए ७ सदस्यों की समिति बनाने के लिए क्रमशः ४, ३ अथवा २ मनुष्य लेने चाहिएं।

३ स्त्रियां और ४ मनुष्य चुनने के प्रकार  ${}^1\text{च}_3 \times {}^1\text{च}_4$  हैं।

४ स्त्रियां और ३ मनुष्य चुनने के प्रकार  ${}^1\text{च}_4 \times {}^1\text{च}_3$  हैं।

५ स्त्रियां और २ मनुष्य चुनने के प्रकार  ${}^1\text{च}_5 \times {}^1\text{च}_2$  हैं।

इसलिए प्रकारों की समस्त संख्या

$$= {}^1\text{च}_3 \times {}^1\text{च}_4 + {}^1\text{च}_4 \times {}^1\text{च}_3 + {}^1\text{च}_5 \times {}^1\text{च}_2 \\ = 700 + 240 + 20 \\ = 960$$

२.५  $s_n$  के महत्तम रहने के लिए  $n$  की वहाँ निकालना।

यह सरलता से जाना जा सकता है कि

$$s_n = \frac{s-n+1}{n} \times s_{n-1}$$

क्योंकि  $\frac{s-n+1}{n} \times s_{n-1}$

$$= \frac{s-n+1}{n} \times \frac{s(s-1) \dots (s-n+2)}{1 \times 2 \times 3 \dots (n-1)}$$

$$= \frac{s(s-1)(s-2) \dots (s-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots (n-1)n}$$

$$= s_n$$

अतः  $s_{n-1}$  का  $\frac{s-n+1}{n}$  से गुणन करने पर

$s_n$  प्राप्त होता है।

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{s-n+1}{n}$$

अथ  $\frac{s-n+1}{n} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1$  तदनुसार  $s_n \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} s_{n-1}$

अथवा  $n \leq \frac{s+1}{2}$  तदनुसार  $s_{cn} \geq s_{cn-1}$

दशा १— मान लो  $s$  युग्म है और  $2t$  के सम है।

$$\text{अतः } \frac{s+1}{2} = \frac{2t+1}{2} = t + \frac{1}{2}$$

$n$  की  $1$  से  $t$  तक की अर्धियों के लिए  $n$ ,  $\frac{s+1}{2}$  से

छोटा है।

अतः  $n = 1, 2, \dots, t$  के लिए  $s_{cn} > s_{cn-1}$

अर्थात्  $s_{ct} > s_{ct-1} > s_{ct-2} \dots > s_{c2} > s_{c1} > s_{c0}$

अतः  $s_{c1}, s_{c2}, \dots, s_{ct}$  इनमें  $s_{ct}$  महत्तम है।

$n$  की अगली बड़ी अर्ध  $t+1$  है।

अब  $n = t+1, t+2, \dots$  के लिए  $n > \frac{s+1}{2}$

अतः  $n = t+1, t+2, \dots, 2t$  के लिए

$$s_{cn} < s_{cn-1}$$

अर्थात्  $s_{ct} > s_{ct+1} > s_{ct+2} \dots > s_{c2t}$

अतः  $s_{ct}, s_{ct+1}, s_{ct+2}, \dots$  इनमें  $s_{ct}$  महत्तम है।

इसलिए  $s_{c1}, s_{c2}, s_{c3}, \dots, s_{c2t}$  इन में  $s_{ct}$

महत्तम है। अर्थात् स यदि युग्म हो तो  $s_{2y}$  महत्तम होगा।

दशा २— मान लो स अयुग्म है और  $2y+1$  के सम है।

$$\therefore \frac{s+1}{2} = \frac{2y+1+1}{2} = y+1$$

न की १ से  $y$  तक की अर्धियों के लिए न,  $\frac{s+1}{2}$  से छोटा है।

$\therefore n=1, 2, 3, \dots, y$  के लिए  $s_{2n} > s_{2n-1}$

अर्थात्

$s_{2y} > s_{2y-1} > s_{2y-2} > \dots > s_{2y} > s_{2y-1} > s_{2y-2}$

अतः  $s_{2y}, s_{2y-1}, s_{2y-2}, \dots, s_{2y}$  इन में  $s_{2y}$  महत्तम है।

यदि  $n=y+1$  तो  $s_{2y} = s_{2y+1}$

न की  $n=y+2, y+3, \dots, (2y+1)$  इन अर्धियों के

लिए न,  $\frac{s+1}{2}$  से बड़ा है।

$\therefore s_{2n} < s_{2n-1}$

अर्थात्

$s_{2y+1} > s_{2y+2} > s_{2y+3} > \dots > s_{2y+1}$

अतः  $s_{चय+1}$ ,  $s_{चय+2}$ , ...  $s_{चय+1}$  इन में  $s_{चय+1}$  महत्तम है।

इसलिए इस दशा में  $s_{च1}$ ,  $s_{च2}$ , ...,  $s_{चय+1}$  इन में  $s_{चय}$  और  $s_{चय+1}$  महत्तम हैं और वे समान हैं।

अतः यदि स अयुग्म हो तो  $s_{चस-1}$  और  $s_{चस+1}$  महत्तम होते हैं और वे समान होते हैं।

९.६ (ट+ठ) भिन्न वस्तुओं को क्रमशः ट और ठ वस्तुएं अन्तर्धारण करने वाले दो समूहों में विभक्त करने के प्रकारों की संख्या निकालना।

स्पष्ट है कि यह, (ट+ठ) वस्तुओं में से प्रत्येक बार ट वस्तुएं लेने पर प्राप्त होने वाले संचयों की संख्या निकालने के समान है। क्योंकि प्रत्येक बार ट वस्तुओं के एक समूह का चुनाव करने में ठ वस्तुओं का समूह छूट जाता है।

$$\begin{aligned} \text{अपेक्षित संख्या} &= \frac{\tau + \theta}{\tau |(\tau + \theta) - \tau} \\ &= \frac{\tau + \theta}{\tau \theta} \end{aligned}$$

... नोट—यदि  $\tau = \theta$  हो तो समूह समान होंगे और इस दशा में अन्तर्विभाग के विभिन्न प्रकारों की संख्या

होगी, क्योंकि किसी भी एक प्रकार में

२ ३ ४

नया यांट प्राप्त किए बिना ही, दोनो समूहोंका व्यतिहरण (interchange) सम्भव है।

९.६१ (ट+ठ+ड) भिन्न वस्तुओं को क्रमशः ट, ठ और ड वस्तुओं को अन्तर्धारण करनेवाले तीन समूहों में विभक्त करने के प्रकारों की संख्या निकालना।

पहले (ट+ठ+ड) वस्तुओं को ट और (ठ+ड) वस्तुओं को धारण करने वाले समूहों में विभक्त करो। यह करने के प्रकारों की संख्या

$$= \frac{\text{ट+ठ+ड}}{\text{ट} \quad \text{ठ+ड}}$$

अब, (ठ+ड) वस्तुओं के प्रत्येक समूह के 'ठ' और 'ड' वस्तुओं को धारण करने वाले ऐसे दो समूहों में विभक्त करने

के संभाव्य प्रकार  $\frac{\text{ठ+ड}}{\text{ठ} \quad \text{ड}}$  हैं परन्तु (ठ+ड) वस्तुओं के

समूहों के संभाव्य प्रकार  $\frac{\text{ट+ठ+ड}}{\text{ट} \quad \text{ठ+ड}}$  हैं। इसलिए

(८+४+३) वस्तुओं के ८, ४ और ३ वस्तुएं धारण करने वाले ऐसे तीन समूहों में विभक्त करने के कुल प्रकार

$$\frac{8+4+3}{8 \quad 4+3} \times \frac{4+3}{4 \quad 3} = \frac{8+4+3}{8 \quad 4 \quad 3}$$

यहां यह अच्छीतरह समझ लेना चाहिए कि समूह किस क्रम में बनते हैं इसपर ध्यान देने की आवश्यकता नहीं है।

बालोक— यदि  $8=4=3$  तो  $\frac{8+4+3}{8 \quad 4 \quad 3}$  प्रकार

प्राप्त होंगे, क्योंकि समूहों में वस्तुओं की संख्या समान होने के कारण उनके व्यतिहरण से नया अन्तर्विभाग प्राप्त नहीं होता और अन्तर्विभाग के प्रत्येक प्रकार के लिए ८ प्रकार हैं इसलिए उक्त फल प्राप्त होता है।

उदाहरण १— २४ छात्रों की कक्षा को ३ समान समूहों में विभक्त करने के प्रकारों की संख्या निकालो।

८ छात्रों के तीन समूह बनाने हैं। अतः प्रकारों की

$$\text{संख्या} = \frac{24}{8 \quad 8 \quad 8 \quad 3}$$



$$= \frac{128}{(12)^3 \cdot 12}$$

९.७ अभी तक केवल विजातीय (unlike) वस्तुओं पर ही विचार किया गया है। किन्तु ऐसी सम्मिश्रणें आ सकती हैं जिनमें कुछ वस्तुएं सजातीय हों। इसलिए सजातीय और विजातीय वस्तुओं की परिभाषा जानना भी आवश्यक है।

जिन वस्तुओं में कोई समान लक्षण विद्यमान हो, तो वे 'सजातीय' और भिन्न-भिन्न लक्षणों वाली वस्तुएं 'विजातीय' कहलाती हैं।

९.७१ सभी एक साथ ली गईं स वस्तुओं के परस्पर विन्यास के प्रकारों की संख्या निकालना, जिन स वस्तुएं सुतट्यतः (exactly) एक प्रकार की हैं अर्थात् सजातीय हैं, व वस्तुएं सुतट्यतः दूसरे प्रकार की हैं अर्थात् सजातीय हैं और शेष सब एकैकशः विजातीय हैं।

मान लो स अक्षर हैं उनमें से स अक्षर क हैं, व अक्षर ख हैं और शेष एकैकशः विजातीय हैं।

मान लो अपेक्षित क्रमचयों की संख्या य है।

यदि स क-अक्षरों का शेष अक्षरों से भिन्न स एकैकशः विजातीय अक्षरों से प्रतिस्थापन किया जाय तो य क्रमचयों में से कितनी भी एक क्रमचय से, शेष अक्षरों के ग्यारों में परिवर्तन किए बिना ही स नये क्रमचय बन सकते हैं।

इसलिए यदि य क्रमचयों में से प्रत्येक में यह परिवर्तन किया जाय तो य त क्रमचय प्राप्त होंगे।

इसी प्रकार घ ख-अक्षरों का प्रतिस्थापन एकैकशः थ विजातीय अक्षरों से करने पर क्रमचयों की संख्या य त थ हो जायगी

सजातीय 'त' और सजातीय 'थ' के स्थानों में सब विजातीय अक्षर रखने से सभी अक्षर विजातीय हो जाते हैं।

यिन्तु स विजातीय अक्षरों के क्रमचयों की संख्या स है।

$$\text{अतः य } \underline{त} \underline{थ} = \underline{स}$$

$$य = \frac{\underline{स}}{\underline{त} \underline{थ}}$$

त और थ वस्तुओं की सजातीयता का ध्यान रखते हुए क्रमचयों की अपेक्षित संख्या उक्त फल है।

उदाहरण— सब मिलाकर १० अक्षर दिए गए हैं, जिनमें दो फ, तीन ख और शेष भिन्न हैं। इन १० अक्षरों के भिन्न क्रमचयों की संख्या निकालो।

१० अक्षरों में से २ एक प्रकार के सजातीय, ३ दूसरे प्रकार के सजातीय और शेष भिन्न हैं।

अतः प्रकारों की अपेक्षित संख्या

$$= \frac{120}{12 \times 12}$$

$$= 302800$$

९.८ 'स' असमरूप वस्तुओं में से प्रत्येक चार 'न' वस्तुएं लेनेपर प्राप्त क्रमचयों की संख्या निकालना जब कि प्रत्येक विन्यास में प्रत्येक वस्तु एक चार, दो चार, ..... 'न' चार तक पुनरावृत्त हो सकती है।

यहां यदि सब वस्तुओं में से प्रत्येक का, किसी भी विन्यास में जितनी चार चाहें प्रयोग किया जा सके तो दस स वस्तुओं से न स्थानों को भरने के प्रकारों की संख्या निकालने पर विचार करना है।

प्रथम स्थान स प्रकारों से भरा जा सकता है और प्रथम स्थान के किसी भी एक प्रकार भरे जाने पर द्वितीय स्थान भी न प्रकारों से भरा जा सकता है क्योंकि उसी वस्तु का फिर से प्रयोग हो सकता है।

इसलिए प्रथम दो स्थानों को भरने के प्रकारों की संख्या स<sup>२</sup> है।

प्रथम दो स्थानों को किसी भी एक प्रकार से भरने पर तीसरा स्थान भी स प्रकारों से भरा जा सकता है। अतः प्रथम तीन स्थान स<sup>३</sup> प्रकारों से भरे जा सकते हैं। इस प्रकार से स्थानों को भरने में यह देखा जाता है कि स का घात सदैव भरे गए स्थानों के सम है। इसलिए न स्थानों को भरने के प्रकारों की संख्या स<sup>n</sup> के सम है।

उदाहरण—५ लड़कों को ३ पुरस्कार कितने प्रकारों से दिए जा सकते हैं, जब प्रत्येक लड़का सभी पुरस्कारों को पाने के योग्य है ?

कोई भी पुरस्कार ५ प्रकारों से दिया जा सकता है । प्रथम पुरस्कार दिए जाने के पश्चात् शेष में से कोई भी पुरस्कार ५ प्रकारों से पुनः दिया जा सकता है । क्योंकि यह, प्रथम पुरस्कार पाने वाले लड़के को भी दिया जा सकता है । अतः दोनों पुरस्कार ५<sup>२</sup> प्रकारों से दिए जा सकते हैं ।

दोनों पुरस्कार दिए जाने पर शेष पुरस्कार पुनः ५ प्रकारों से दिया जा सकता है क्योंकि प्रत्येक लड़का पुरस्कार पाने योग्य है ।

अतः तीनों पुरस्कार ५<sup>३</sup> प्रकारों से दिए जा सकते हैं इसलिए जब प्रत्येक लड़का सभी पुरस्कार पाने के योग्य है तब ५ लड़कों को ३ पुरस्कार देने के कुल प्रकार १२५ हैं ।

९.८१ स वस्तुओं में से कुछ या सब वस्तुओं के सम्भाव्य चुनावों के प्रकारों की कुल संख्या निकालना ।

प्रत्येक वस्तु के साथ दो प्रकार से व्यवहार किया जा सकता है । या तो उसे लिया जा सकता है, या छोड़ दिया जा सकता है ।

क्योंकि किसी एक वस्तु के साथ व्यवहार के प्रत्येक प्रकार को, अन्य वस्तुओं में से किसी एक के साथ व्यवहार के प्रत्येक प्रकार से सम्बद्ध कर सकते हैं इसलिए स वस्तुओं के साथ व्यवहार करने के प्रकारों की संख्या  $(2 \times 2 \times 2 \times \dots$  स खण्डों तक) है । किन्तु इस में उस प्रकार का भी समावेश

किया गया है जिसमें सब वस्तुएं छोड़ दी गई हैं। इसे छोड़ अन्य प्रकारों की कुल संख्या  $2^3 - 1$  है।

१.८२  $t + y + d + \dots$  वस्तुओं में कुछ भयवा सब वस्तुओं के संभाव्य चुनावों के प्रकारों की संख्या निकालना, जिसमें  $t$  एक प्रकार की सजातीय,  $y$  दूसरे प्रकार की सजातीय,  $d$  तीसरे प्रकार की सजातीय..... इत्यादि वस्तुएं हैं।

$t$  वस्तुओं के साथ  $(t+1)$  प्रकारों से व्यवहार किया जा सकता है क्योंकि उनमें से  $0, 1, 2, \dots, t$  वस्तुएं ली जा सकती हैं। इसी प्रकार  $y$  वस्तुओं के साथ  $(y+1)$  प्रकारों से व्यवहार किया जा सकता है और इसी प्रकार  $d$  भी। अतः सब वस्तुओं के साथ व्यवहार करने के प्रकार  $(t+1)(y+1)(d+1)\dots$  हैं।

किन्तु इनमें उस प्रकार का भी समावेश है जिसमें इन वस्तुओं में से कोई भी वस्तु नहीं ली गई। इस प्रकार को छोड़कर अन्य प्रकारों की समस्त संख्या

$$= [(t+1)(y+1)(d+1) \dots] - 1$$

उदाहरण १— एक दूरलिख साधित्र (telegraph apparatus) की ६ भुजाएं हैं जिनमें से प्रत्येक, विधाम स्थिति समेत ५ स्पष्ट संज्ञितियां (signals) भेजने में समर्थ हैं। दिखाओ कि संज्ञितियों की समस्त संख्या १५६२४ है।

पहली भुजा विधाम स्थिति समेत ५ स्पष्ट संज्ञितियां भेज सकती है। यदि पहली भुजा ५ स्थितियों में से

फिली एक स्थिति में हो तो दूसरी भुजा ५ स्पष्ट संश्लेषियां भेज सकती है। अतः दोनों भुजाएँ मिलाकर ५<sup>२</sup> स्पष्ट संश्लेषियां भेजेंगी। इनमें दोनों भुजाओं की विधाम स्थिति का भी समावेश है। जब ३ भुजाओं पर विचार किया जाता है तो संश्लेषियों की संख्या ५<sup>३</sup> होती है ..... और इसी प्रकार आगे भी।

अतः छहों भुजाओं के क्रियाशील होने पर दूरालिख साधित्र ५<sup>१</sup> स्पष्ट संश्लेषियां भेजने में समर्थ होगा। किन्तु इनमें सद्यः भुजाओं की विधाम अवस्था के प्रकार का समावेश होता है। अतः स्पष्ट संश्लेषियों की समस्त संख्या ५<sup>१</sup> - १ अर्थात् १५६२४ है।

उदाहरण २— एक रेल गाड़ी में १६ डिब्बे हैं जिनमें ३ प्रथम वर्ग के, ४ द्वितीय और ५ तृतीय वर्ग के हैं और शेष एकैकशः भिन्न हैं। यदि प्रत्येक वर्ग के डिब्बे सजातीय मान लिए जायं तो कितने प्रकारों से गाड़ी के डिब्बों का विन्यास किया जा सकता है? प्रथम वर्ग के डिब्बों को एक साथ रखने में विन्यास के कितने प्रकार हो सकते हैं?

१६ डिब्बों में ३ एक प्रकार के सजातीय, ४ दूसरे प्रकार के सजातीय, ५ तीसरे प्रकार के सजातीय, और शेष एकैकशः भिन्न हैं।

$$\text{अतः क्रमचयों की संख्या} = \frac{16!}{3! 4! 5!}$$

दूसरी वंशा में प्रथम वर्ग के द्विप्ये एक साथ हैं उन्हें (प्रथम वर्ग के द्विप्यों को) एक मान लिया जाय। अतः इस विन्यास में द्विप्यों की समस्त संख्या १४ है जिनमें ४ एक प्रकार के सजातीय, ५ दूसरे प्रकार के सजातीय और शेष एकैकदाः भिन्न हैं।

$$\text{अतः क्रमचयों की अपेक्षित संख्या} = \frac{14}{1 \times 4}$$

उदाहरण ३— सब मिलाकर ११ अक्षर हैं, जिनमें दो क हैं, दो ग हैं, तीन ख हैं, और अन्य घ, च, छ, ज हैं। इन अक्षरों में से चार अक्षरों के (अ) चुनावों की और (आ) विन्यास के प्रकारों की संख्या निकालो।

क, क, ख, ख, ख; ग, ग; घ, च, छ, ज ये सात भिन्न प्रकारके सब मिलाकर ११ अक्षर हैं चार-चार के समूह बनाने के लिए इनका इस प्रकार वर्गीकरण होना चाहिए।

- (१) तीन सजातीय और एक भिन्न
- (२) दो सजातीय और दूसरे दो सजातीय
- (३) दो सजातीय और दो भिन्न
- (४) चारों भिन्न

(१) यह चुनाव ६ प्रकारों से किया जा सकता है क्योंकि तीन ख अक्षरों के अंकले समूह के साथ क, ग, घ, च, छ, ज इन अक्षरों में से प्रत्येक को लिया जा सकता है।

(२) यह प्रवरण  ${}^2\text{च}$ , प्रकारों से किया जा सकता है क्योंकि क, क; ख, ख, ग, ग इन तीन युग्मों में से दो युग्मों का चुनाव करना है। इससे ३ प्रकार प्राप्त होते हैं।

(३) यह चुनाव  $३ \times {}^1\text{च}$ , प्रकारों से किया जा सकता है, क्योंकि तीन युग्मों में से एक का और शेष ६ अक्षरों में से २ का चुनाव करना है।

(४) इसे  ${}^0\text{च}$ , प्रकारों से किया जा सकता है क्योंकि सात भिन्न अक्षरों में से चार भिन्न अक्षरों का चुनाव करना है।

अतः चुनावों की समस्त संख्या

$$= ६ + {}^2\text{च} + (३ \times {}^1\text{च}) + {}^0\text{च},$$

$$= ६ + ३ + \frac{३ \times ६ \times ५}{१ \times २} + \frac{७ \times ६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३ \times ४}$$

$$= ६ + ३ + ४५ + ३५$$

$$= ८९$$

चार अक्षरों के भिन्न भिन्न विन्यासों को निकालने के लिए पूर्वगामी समूहों में से प्रत्येक का सब संभाव्य प्रकारों से क्रमबद्ध करना होगा।

$$(१) \text{ से } ६ \times \frac{४}{३} \text{ अथवा } २४ \text{ विन्यास}$$

$$(२) \text{ से } ३ \times \frac{४}{२} \frac{४}{२} \text{ अथवा } १८ \text{ विन्यास}$$



(३) से  $४५ \times \frac{४}{२}$  अथवा ५४० विन्यास

(४) से  $३५ \times ४$  अथवा ८४० विन्यास प्राप्त होते हैं।

अतः विन्यासों की समस्त संख्या

$$= २४ + १८ + ५४० + ८४०$$

$$= १४२२$$

### प्रश्नावलि १४

- (१) दम्पई और मद्रास के बीच ८ जलयान चलेते हैं। एक मनुष्य कितने प्रकारों से, दम्पई से मद्रास जाकर भिन्न जलयान से लौट सकता है?
- (२) १० उपन्यासों, ६ मासिक पत्रिकाओं और ८ दैनिक पत्रिकाओं से किसी एक उपन्यास, एक मासिक पत्रिका, और एक दैनिक पत्रिका का चुनाव कितने प्रकारों से किया जा सकता है?
- (३) किसी अलमारी के एक खाने में केवल ८ पुस्तकें रखी जा सकती हैं। १२ पुस्तकें उसमें कितने प्रकारों से रखी जा सकेंगी?
- (४) ८ भिन्न पुस्तकों का अलमारी के खाने में कितने प्रकारों से विन्यास किया जा सकता है, जिससे

दो विशेष पुस्तकें एक दूसरे के साथ रहें ?

(५) १० लङ्कों का एक पंक्ति में कितने प्रकारों से विन्यास किया जा सकता है? इनमें से कितने प्रकारों में आदि और अन्त के स्थानों में दो विशेष लङ्के रहेंगे?

(६) ११ परीक्षा-पत्रों को कितने भिन्न क्रमों में रखा जा सकता है जिस से तीन गणित-पत्रों में से कोई भी दो अनुगामी न हों ?

(७) हत संकेतना में व्यक्त करो—

(अ)  $12 \times 11 \times 10$  (आ)  $4 \times 9 \times 10 \times 11$

(इ)  $s(s-1)(s-2)(s-3)$

(ई)  $s(s+1)(s+2)$

(उ)  $s(s+1)(s+2)(s+3)\dots(s+n)$

(८) सरल करो (अ)  $\frac{s}{n-2}$  (आ)  $\frac{s}{s-2} - \frac{s-2}{s-2}$

(९) सिद्ध करो कि

(अ)  $\frac{2s}{s} \div \frac{s}{s} = 2^s [1 \times 3 \times 5 \times 7 \dots (2s-1)]$

(आ)  $2 \times 4 \times 6 \times 8 \dots (2s-2) (2s-2)$

$= (s+1)(s+2)(s+3)\dots(2s-1)(2s)$

(१०) ७ सांक्षेत्रिक वर्णों (prismatic colours) के भिन्न विन्यासों की संख्या निकालो जिससे नीला और हरा वर्ण एक साथ न हो।

- (११) ३ व्यंजन और २ स्वर इन ५ अक्षरों से ऐसे कितने भिन्न शब्द बन सकते हैं, जिससे किसी भी शब्द में तीन व्यंजन एक साथ न हों?
- (१२)  ${}^1\text{च}_{३०}, {}^2\text{च}_{२४}, {}^3\text{च}_{१८}$  की अर्धांश निकालो।
- (१३)  ${}^1\text{क}_{१}, {}^2\text{क}_{४}, {}^3\text{क}_{५}$  की अर्धांश निकालो।
- (१४) यदि  ${}^1\text{सचन} = {}^2\text{सचन} + २$ , तो न की अर्धांश निकालो।
- (१५) यदि  $\text{म} = {}^1\text{च}$ , तो दिखाओ कि  $\text{मच} = ३ \text{ स} + {}^1\text{च}$   
[कलकत्ता १९१२]
- (१६) दो आदमी एक रेल के डिब्बे में जाते हैं जिसमें ६ रिक्त स्थान हैं। कितने भिन्न प्रकारों से वे उसमें बैठ सकते हैं?
- (१७) ५ लियाँ और ३ पुरुष टेनिस खेलना चाहते हैं। कितने प्रकारों से वे विभक्त हो सकते हैं यदि सभी पुरुष एकही पक्ष में न हों?  
[नागपुर १९२६]
- (१८) ८ और ६ खिलाड़ियों के दो समूहों में से ११ खिलाड़ियों का क्रिकेट संघ के लिये चुनाव करना है। यदि ६ के समूह से कम से कम ४ को लेना हो तो कितने प्रकारों से चुनाव किया जा सकता है?  
[मद्रास १८९७]
- (१९) दो क्रिकेट दल हैं और प्रत्येक में १५ सदस्य हैं। यदि प्रथम दल का एक सदस्य फेंक लेना हो और दूसरा सदस्य ख छोड़ना हो तो, प्रत्येक पक्ष में ११

खिलाड़ी चुनकर कितने प्रकारों से खेल का विन्यास किया जा सकता है। [अन्नामलाई १९३५]

(२०) एक क्रिकेट दल में १४ सदस्य हैं जिनमें ५ गेंद फेंक सकते हैं। कम से कम ३ गेंद फेंकने वालों को लेकर ११ सदस्यों का चुनाव कितने प्रकारों से हो सकता है? [थान्ध १९४०]

(२१) क्रिकेट के १६ खिलाड़ियों में ६ गेंद फेंकने वाले, और ३ विकेट रक्षक हैं। ११ खिलाड़ियों का चुनाव करना है। यदि ११ खिलाड़ियों में ४ गेंद फेंकने वाले और २ विकेट रक्षक हों तो चुनाव कितने प्रकारों से किया जा सकता है? [आन्ध्र १९३५]

(२२) किली भी अंक की पुनरावृत्ति न करके १, ३, ५, ७, अंकों के प्रयाग से चनेवाली १००० से बड़ी संख्याओं की संख्या और उनका योग निकालो।

(२३) १२ वस्तुओं में से प्रत्येक बार ५ वस्तुएं लेने पर ४ वस्तु वस्तुएं सदैव कितने क्रमचयों में रहेंगी? [नागपुर १९२५]

(२४) १० वस्तुओं में से प्रत्येक बार चार लेने पर उनके कितने क्रमचयों में एक विशेष वस्तु (१) सदैव रहेगी (२) कभी भी न रहेगी? [कलकत्ता १९३६]

(२५) एक व्यक्ति अपने ४० मित्रों को भिन्न भिन्न समूहों में अधिक से अधिक भोजन देना चाहता

है । प्रत्येक भोज में अतिथियों की संख्या समान है तो बताओ उसे प्रत्येक बार कितने मित्रों को बुलाना चाहिए और वह कुल कितने भोज देगा ?

[यम्बई १८८४]

- (२६) एक व्यक्ति १२ मित्रों को भिन्न भिन्न समूहों में अधिक से अधिक भोज देना चाहता है । प्रत्येक भोज में अतिथियों की संख्या समान है । तो बताओ उसे प्रत्येक भोज में कितने व्यक्ति आमंत्रित करने चाहिए और कितने भोजों में एक विशेष व्यक्ति बार बार आमंत्रित होगा ?

[मैसूर १९३२]

- (२७) एक वाचनालय में संस्कृत की १६ और हिन्दी की ८ पुस्तकें हैं । संस्कृत की ४ और हिन्दी की ३ पुस्तकों के समूह को थलमारी के खाने में कितने प्रकारों से रखा जा सकता है ?

- (२८) ७ बिन्दु और ५ प्रासों (dashas) का किसी रेखा में कितने प्रकारों से विन्यास किया जा सकता है ?

- (२९) २ नीली, १ श्वेत, १ लाल, और १ काली पताकाओं से कितनी विभिन्न संज्ञप्तियां हो सकती हैं ?

- (३०) एक वाचनालय में एक पुस्तक की ५ प्रतियां, दो पुस्तकों की ४. ४ प्रतियां, तीन पुस्तकों की ६, ६ प्रतियां और ८ पुस्तकों की एक एक प्रति है । इन सब पुस्तकों का कितने प्रकारों से विन्यास किया जा सकता है ?

[कलकत्ता १९३४]

- (३१) स वस्तुओं में से प्रत्येक बार 'न' वस्तुएं लेने पर प्राप्त होनेवाले क्रमचर्यों का अभिधान क्र<sub>n</sub> से होता हो तो दिखाओ कि

$$\text{क्र}_1 + \frac{\text{क्र}_2}{2} + \frac{\text{क्र}_3}{3} + \dots + \frac{\text{क्र}_n}{n} = 2^n - 1$$

[मद्रास १८८०]

- (३२) १५ गेंदों का कितने प्रकारों से विन्यास हो सकता है यदि उनमें ६ काली, ५ लाल और ४ श्वेत हों ?
- (३३) ६ पताकाओं से विभिन्न संज्ञप्तियां करने की संख्या निकालो यदि उनमें २ श्वेत, २ काली, और २ लाल हों ?
- (३४) ०, १, १, २, ३, ४ अंकों में से प्रत्येक बार चार, चार अंक लेकर १००० से बड़ी संख्याएं कितनी बनेंगी ?  
[मद्रास १८८९]
- (३५) १, २, ३, ३, ३, ४ अंकों के प्रयोग से ४००० से छोटी संख्याएं कितनी बनेंगी ?  
[मद्रास १९१९]
- (३६) १२१२०२ संख्या के अंकों से ६ अंकों वाली विभिन्न संख्याएं कितनी बनेंगी ?  
[मद्रास १८८६]
- (३७) २, ३, ०, २, ३, ३ अंकों से ६ अंकों वाली कितनी संख्याएं बन सकती हैं ?  
[नागपुर १९४६]
- (३८) यदि आचार्य पद के लिए तीन प्रतिस्पर्धी हों और ५ मनुष्यों के मतों से एक का निर्वाचन करना हो तो कितने प्रकारों से मतदान हो सकता है ?  
[चम्बई १८८८]

- (३९) ४ चयन हैं जिनमें से प्रत्येक पर ८ भिन्न भिन्न गहर हैं। इनसे भिन्न संकेतवाले कितने अक्षर-तालक (letter locks) बन सकते हैं ?
- (४०) एक निर्वाचन में ५ प्रतिस्पर्धी हैं और ३ का निर्वाचन करना है। मतदाता निर्वाचित होनेवाले प्रतिस्पर्धियों की संख्या से अधिक मत नहीं दे सकते। कितने प्रकारों से एक मतदाता मत दे सकता है ?
- (४१) १ रुपया, १ अठ्ठाई, १ चवथी, १ दुधली, और १ इकठ्ठी, इन सिक्कों (coins) से कितने विभिन्न संरलन (sums) हो सकते हैं ?
- (४२) ३ लाल, २ नीलो, २ पीली, १ हरी, १ इत्र, और १ धैगनी पताकाओं में से ४ पताकाओं के (१) चुनाव की और (२) विन्यास के संभाव्य प्रकारों की संख्या निकालो।
- (४३) द्वादश भुज के कोण-बिन्दुओं को जोड़ने से कितने त्रिकोण प्राप्त होंगे ?
- (४४) एक समतल में न बिन्दु हैं जिनमें संरेख न बिन्दुओं को छोड़कर कोई भी तीन बिन्दु एक सरल रेखा में नहीं हैं। बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त होने वाली (१) विभिन्न रेखाओं और (२) त्रिकोणों की संख्या निकालो।
- (४५) एक रेल मार्ग पर ८ स्थान (stations) हैं। यदि गाड़ी के ठहरने के कोई दो स्थान अनुगामी (consecutive) न हों तो दिखाओ कि कोई गाड़ी इनमें किन्हीं तीन स्थानों पर

$\frac{1}{6}$  (स-२) (स-३) (स-४) प्रकारों से ठहर सकती है ।

४६) एक रेल-मार्ग पर १० स्थात्र हैं । यदि किसी एक स्थात्र से दूसरे स्थात्र के लिए तृतीय श्रेणी के पत्रक (tickets) मिल सकते हों तो बताओ कि तृतीय श्रेणी के कितने पत्रक छपने चाहिए ?

४८) एक पुरालिख साधित्र की ५ भुजाएं हैं, जिनमें प्रत्येक विधाम-स्थिति समेत ४ स्पष्ट संज्ञातियां भेजने में समर्थ है । दिखाओ कि संज्ञातियों की संख्या १०२३ है ।



## दसवां अध्याय

### गणितीय अनुमान

(mathematical induction)

१०.१ नीचे दिए उदाहरणों के अध्ययन से गणितीय अनुमान की रीति विद्यार्थियों की समझ में भली भांति आजायगी।

उदाहरण १— सिद्ध करो कि प्रथम  $n$  प्राकृतिक संख्याओं का

योग  $\frac{n(n+1)}{2}$  है।

यह सिद्ध करना है कि

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

[ $n$  की सब गहराइयों के लिए]

$$\text{अब } 1 = \frac{1}{2} [1+1] \quad \dots \dots \dots (1)$$

अतः प्रमेय  $n=1$  के लिए सत्य है।

पुनः प्रथम दो पदों का योग

$$1+2 = \frac{1}{2} [1+1] + 2$$

[ (१) का प्रयोग करने से ]

$$= \frac{2}{2} [2+1] \dots\dots\dots (२)$$

अतः प्रमेय स=२ के लिए सत्य है।

पुनः  $(1+2)+3 = \frac{2}{2} [2+1] + 3$

[ (२) का प्रयोग करने से ]

$$= 6$$

$$= \frac{3}{2} [3+1]$$

अतः प्रमेय स=३ के लिए सत्य है।

यहां यह ध्यान में रखना आवश्यक है कि प्रत्येक फल का उपपादन पिछले फल के उपपादन पर निर्भर रखा गया है।

मान लो स की विशेष अर्थात् त है। अब त के लिए इस सूत्र की सत्यता की कल्पना करो। अब यह सिद्ध किया जायगा कि यह स की आगामी उच्चतर अर्थात्  $(त+१)$  के लिए भी सत्य है।

$$1+2+3+\dots+t = \frac{त(त+१)}{२} \text{ सत्य है.. .... (४)}$$

दोनों पक्षों में  $(त+१)$  जोड़ो।

$$\begin{aligned}
 \therefore (1+2+3+\dots+t) + (t+1) \\
 &= \frac{1}{2} t (t+1) + (t+1) \\
 &= \frac{1}{2} (t+1) (t+2)
 \end{aligned}$$

अर्थात् फल,  $s=t+1$  के लिए सत्य है। अतः यदि उक्त कल्पना  $s=t$  के लिए सत्य हो तो यह  $s=t+1$  के लिए भी सत्य होगी। अर्थात् प्रमेय जहाँ भी  $s$  की किसी विशेष अर्ही के लिए सत्य है वहाँ वह  $s$  की आगामी उच्चतर अर्ही के लिए भी सत्य होगा।

यह दिखाया गया है कि प्रमेय  $s=1$  के लिये सत्य है। अतः  $s=2, 3$  के लिये सत्य है। अब यह  $s=3$  के लिए सत्य है इसलिए  $s$  की आगामी उच्चतर अर्ही अर्थात् 4 के लिए भी सत्य है।

यह  $s=4$  के लिए सत्य है इसलिए  $s$  की आगामी उच्चतर अर्ही अर्थात् 5 के लिए भी सत्य है।

इस विधा के लगातार प्रयोग करने से अन्ततः यह सिद्ध किया जा सकता है कि,  $s$  की किसी भी विशिष्ट धन पूर्णांक अर्ही के लिए प्रमेय सत्य है। इससे प्रमेय की उपपत्ति का पूर्णतः स्थापन हो जाता है।

उदाहरण २ — गणितीय अनुमान की रीति से यह सिद्ध करो कि यदि  $s$  कोई धन पूर्णांक हो तो  $(y-r)$  यह  $y^s - r^s$  का खण्ड है।

यह स्पष्ट है कि  $s=1$  लिये  $y-r$  यह  $y^s - r^s$  का खण्ड है। पुनः  $s=2$  के लिए  $y^s - r^s$ ,  $(y^2 - r^2)$  होता है।

$$\text{अथ } y^2 - r^2 = y(y-r) + r(y-r) \dots\dots\dots(२)$$

क्योंकि दक्षिण पक्ष के दोनों पदों में  $(y-r)$  खण्ड है, इसलिए स्पष्टतः  $y^2 - r^2$  में  $(y-r)$  खण्ड है। अतः प्रमेय  $s=2$  के लिए सत्य है। पुनः  $s=3$  के लिए

$$\begin{aligned} y^3 - r^3 &= y \times y^2 - y \times r^2 + y \times r^2 - r \times r^2 \\ &= y(y^2 - r^2) + r^2(y-r) \end{aligned}$$

(१) और (२) का प्रयोग करने से यह सिद्ध होता है कि  $(y^3 - r^3)$  में  $y-r$  खण्ड है।

अतः  $y^s - r^s$  में  $s=3$  के लिए  $y-r$  खण्ड है। अनुमान करो कि  $s$  की विशेष कल्पित अर्थात्  $t$  के लिए  $y^t - r^t$  में  $(y-r)$  खण्ड है। अब यह सिद्ध किया जायगा कि  $s$  की आगामी उच्चतर अर्थात्  $s=n+1$  के लिए भी  $(y^{n+1} - r^{n+1})$  में  $y-r$  खण्ड है।

$$\begin{aligned} \text{अथ } y^{t+1} - r^{t+1} &= y \times y^t - y \times r^t + y \times r^t - r \times r^t \\ &= y[y^t - r^t] + r^t[y-r] \end{aligned}$$

यह कल्पना की गई है कि  $y^t - r^t$  का  $y-r$  खण्ड है और यह स्पष्ट है कि  $y-r$ ,  $r^t(y-r)$  का खण्ड है। क्योंकि दक्षिण पक्ष के दोनों पदों में  $y-r$  खण्ड है इसलिए  $y-r$  वाम पक्ष का भी खण्ड है।

अतः यदि यह कल्पना कि  $y^t - r^t$  का  $y-r$  खण्ड है सत्य हो तो वह  $y^{t+1} - r^{t+1}$  का भी खण्ड होगा। यह दिखाया गया है कि  $s=1$  के लिए  $y^s - r^s$  में  $(y-r)$  खण्ड है, अतः  $s=2, 3$  के लिए भी खण्ड है। क्योंकि  $y-r$ ,  $y^s - r^s$  का  $s=3$  के लिए खण्ड है, इसलिए वह  $y^s - r^s$

का  $s=4$  के लिए भी खण्ड होगा। अतः  $y-r$ ,  $y^4-r^4$  का खण्ड है। क्योंकि  $y-r$ ,  $y^8-r^8$  का  $s=4$  के लिए खण्ड है, इसलिए वह  $y^4-r^4$  का  $s=4$  के लिए भी खण्ड होगा। अतः  $y-r$ ,  $y^4-r^4$  का खण्ड है।

इस विधा के लगातार प्रयोग से यह पूर्णतः स्थापित हो जाता है कि 'स' की सब धनपूर्णांक अर्थात्ओं के लिए,  $y^s-r^s$  में  $y-r$  खण्ड है।

### प्रश्नावलि १५

गणितीय अनुमान की रीति से सिद्ध करो—

$$(१) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + s^2 = \frac{s(s+1)(2s+1)}{6}$$

$$(२) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + s^3 = \left[ \frac{s(s+1)}{2} \right]^2$$

$$(३) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2s-1) = s^2$$

$$(४) \quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + s(s+1) = \frac{s(s+1)(s+2)}{3}$$

$$(५) \quad k + (k+c) + (k+2c) + \dots + [k+(s-1)c] = \frac{s}{2} [2k + (s-1)c]$$

$$(६) \quad k + kn + kn^2 + \dots + kn^{n-1} = \frac{k[1 - n^n]}{1 - n}$$

(७) सिद्ध करो कि  $s$  की सयुग्म घन पूर्णांक अहाँ के लिए  $y^s + r^s$ ,  $y + r$  से भाज्य है।

$$(८) \quad \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{s(s+1)} = \frac{s}{s+1}$$

## ग्यारहवां अध्याय

### द्विपद प्रमेय

(binomial theorem)

धन पूर्णांक घात

११.१ प्रत्यक्ष गुणन से प्राप्त किए गए इन फलों पर विचार करो।

$$\begin{aligned}
 (y + k_1)(y + k_2) &= y^2 + (k_1 + k_2)y + k_1 k_2 \\
 (y + k_1)(y + k_2)(y + k_3) \\
 &= [y^2 + (k_1 + k_2)y + k_1 k_2] [y + k_3] \\
 &= y^3 + (k_1 + k_2 + k_3)y^2 \\
 &\quad + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)y + k_1 k_2 k_3 \\
 (y + k_1)(y + k_2)(y + k_3)(y + k_4) \\
 &= [y^3 + (k_1 + k_2 + k_3)y^2 \\
 &\quad + (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)y + k_1 k_2 k_3] \times [y + k_4] \\
 &= y^4 + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)y^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [क_1 क_2 + क_1 क_3 + क_1 क_4 + क_2 क_3 \\
& \quad + क_2 क_4 + क_3 क_4] य^4 \\
& + [क_1 क_2 क_3 + क_1 क_2 क_4 + क_1 क_3 क_4 \\
& \quad + क_2 क_3 क_4] य^5 \\
& + क_1 क_2 क_3 क_4
\end{aligned}$$

यदि खण्डों की संख्या कम हो तो प्रत्यक्ष गुणनफल सरलता से मिलता है, किन्तु खण्डों की संख्या अधिक हो तो गुणन-विद्या दीर्घसूत्री होती है। अतः ऐसी अवस्था में गुणनफल पाने के लिए किसी दूसरी विद्या की सहायता लेनी होगी। दाहिनी ओर के भिन्न भिन्न पदों का निरीक्षण करो और अन्त के गुणनफल पर जिसमें चार द्विपद खण्डों का गुणन किया गया है, विचार करो।

सम्पूर्ण गुणनफल अनेक आंशिक गुणनफलों का योग है और प्रत्येक आंशिक गुणनफल सब संभाव्य प्रकारों से वाम पक्ष के चार खण्डों में से प्रत्येक से केवल एक अक्षर लेने पर प्राप्त ४ अक्षरों का गुणनफल है।

अब आंशिक गुणनफलों पर विचार करो।

- (१) वाम पक्ष के चारों खण्डों में से प्रत्येक से 'य' अक्षर लेने पर गुणन-फल  $य^4$  होता है। इस प्रकार पहला पद  $य^4$  बनता है।
- (२) सब संभाव्य प्रकारों से चुने गए किन्हीं तीन खण्डों में से प्रत्येक से 'य' लेने पर और शेष खण्ड में से  $क_1$ ,  $क_2$ ,  $क_3$ , और  $क_4$ , में से एक अक्षर लेने



पर जो गुणनफल प्राप्त होते हैं उनके योग से दूसरा पद घनता है।

( $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ )  $y^3$  यह द्वितीय पद है।

- (३) सब संभाव्य प्रकारों से चुने गए किन्हीं दो खण्डों में से प्रत्येक में 'य' लेने पर और शेष दो खण्डों में से  $k_1, k_2, k_3$  और  $k_4$  में से कोई दो अक्षर लेने पर जो ( ${}^3C_2$ ) गुणनफल प्राप्त होते हैं उनके योग से तीसरा पद घनता है।

- (४) सब संभाव्य प्रकारों से चुने गए चार खण्डों में से किसी भी एक खण्ड से 'य' लेने पर और शेष खण्डों में से  $k_1, k_2, k_3$  और  $k_4$  में से कोई भी तीन लेने पर जो गुणनफल ( ${}^4C_1$ ) प्राप्त होते हैं उनके योग में चौथा पद घनता है।

- (५) अन्तिम पद (पाँचवाँ) य-विरहित है और  $k_1, k_2, k_3$  तथा  $k_4$  इन चार राशियों का गुणनफल है।

उक्त विधा से इन उदाहरणों का साधन किया गया है—

उदाहरण १—  $(y-1)(y+2)(y+3)(y-4)$  को गुणा करो।

$$\begin{aligned} \text{गुणनफल} &= y^4 + [-1+2+3-4]y^3 \\ &+ [(-1)(2) + (-1)(3) + (-1)(-4) \\ &\quad + 2 \times 3 + 2(-4) + 3(-4)]y^2 \\ &+ [(-1)(2)(3) + (-1)(2)(-4) \\ &\quad + 2 \times 3(-4) + (-1)(3)(-4)]y \\ &+ (-1)(2)(3)(-4) \\ &= y^4 - 2y^3 - 43y^2 - 42y + 24 \end{aligned}$$

## उदाहरण २—

$(य+३)(य-५)(य+१)(य+२)(य-८)$  के गुणनफल में  $य^२$  का गुणक (coefficient) निकालो।

$य^२$  को धारण करने वाले पद किन्हीं भी दो खण्डों में ले लिए गए  $य$  के और शेष खण्डों में से लाई गई तीन संख्यात्मक राशियों के गुणनफल से बनते हैं। अतः  $य^२$  का गुणक, ३, -५, १, २, -८ इन राशियों में से तीन तीन करके प्रत्येक बार लाई गई राशियों के गुणनफल का योग के सम है।

∴ अपेक्षित गुणक

$$\begin{aligned}
 &= ३(-५)१ + ३(-५)२ + ३(-५)(-८) + ३ \times १ \times २ \\
 &\quad + ३ \times १(-८) + ३ \times २(-८) + (-५)(१)(२) \\
 &\quad + (-५)१(-८) + १ \times २(-८) + (-५)२(-८) \\
 &= -१५ - ३० + १२० + ६ - २४ - ४८ - १० + ४० - १६ + ८० \\
 &= १०३
 \end{aligned}$$

११.२ स द्विपद खण्डों का गुणनफल —

$(य+क_१)(य+क_२)(य+क_३) \dots\dots\dots (य+क_११)$   
के गुणनफल पर विचार करो।

स द्विपद खण्डों के गुणनफल को प्राप्त करने के लिए गत अनुच्छेद में चार द्विपद खण्डों के गुणन के लिए दी गई रीति का अनुसरण किया जायगा।

सब संभाव्य प्रकारों से स खण्डों में से प्रत्येक से एक

अक्षर चुनकर उन सबके गुणनफल से प्राप्त आंशिक गुणनफलों के योग से सम्पूर्ण गुणनफल प्राप्त होता है। अतः अन्तिम फल में आनेवाले प्रत्येक पद की विमा (dimensions) स होती है।

य का उच्चतम घातीय पद य<sup>s</sup> है और यह प्रत्येक खण्ड में से य को लेकर उनके गुणनफल से बनता है।

सब संभाव्य प्रकार से चुने हुए किन्हीं (स-१) खण्डों में के प्रत्येक से य को लेकर और क<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, क<sub>३</sub>, ..... क<sub>s</sub>, इनमें से कोई भी एक अक्षर लेकर य<sup>s-१</sup> को धारण करने वाले पद बनते हैं। अतः अन्तिम गुणनफल में य<sup>s-१</sup> का गुणक क<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, क<sub>३</sub>, ..... क<sub>s</sub> इन अक्षरों के योग के सम है। इस योग का यो<sub>१</sub> से अभिधान करो। यह स्पष्ट है कि जिन पदों से यो<sub>१</sub> बनता है उनकी संख्या स<sub>१</sub> के सम है।

सब संभाव्य प्रकार से चुने गए किन्हीं (स-२) खण्डों में के प्रत्येक से य को लेकर और शेष खण्डों में से क<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, क<sub>३</sub>, ... क<sub>s</sub>, में से कोई दो अक्षर लेकर य<sup>s-२</sup> को धारण करने वाले पद बनते हैं। अतः अन्तिम गुणनफल में य<sup>s-२</sup> का गुणक क<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, क<sub>३</sub>, ..... क<sub>s</sub> अक्षरों में से प्रत्येक बार लिए गए दो अक्षरों के गुणनफल के योग के सम है। इस योग का यो<sub>२</sub> से अभिधान करो। यो<sub>२</sub> में पदों की संख्या स<sub>२</sub> है।

अब सामान्यपद अर्थात् य<sup>s-n</sup> को धारण करने वाला पद लिखा जा सकता है।



‘क’ के सम लिया जाय तो यो, का सच, क में, यो, का सच, क में..... यो न का सच न क में..... यो स-१, का सच स-१, क स-१ में, और यो स का क स में परिवर्तन हो जाता है।

अतः स द्विपद छण्डों का गुणनफल जिनमें से प्रत्येक (य + क) के सम है,

$(य + क)^स = य^स + सच, क य^{स-१} + सच, क^२ य^{स-२} + \dots + सच न य^{स-न} + \dots + सच स-१, क^{स-१} य + क^स$   
से व्यक्त किया जा सकता है।

यह स्पष्ट है कि ऊपर के फल में पदों की संख्या (स + १) है।

(य + क)<sup>स</sup> का उपर्युक्त विस्तार धन पूर्णांक घात के लिए द्विपद विस्तार कहलाता है।

११.२२ (य + क)<sup>स</sup> के उपर्युक्त विस्तार में यदि य और क का व्यतिहरण किया जाय तो

$(क + य)^स = क^स + सच, य क^{स-१} + सच, य^२ क^{स-२} + \dots + सच न य^{स-न} + \dots + सच स-१, य^{स-१} क + य^स$   
प्राप्त होगा।

दोनों विस्तारों की तुलना से यह सात होता है कि पहले का विन्यास य के आरोही घातों में और दूसरे का य के आरोही घातों में है।

यदि द्वितीय विस्तार में क = १ रखा जाय तो

$(१ + य)^स = १ + सच, य + सच, य^२ + \dots + सच न य^{स-न} + \dots + सच स-१, य^{स-१} + य^स$

इस विस्तार में के  $s, s, \dots, s$  द्विपद गुणक (binomial coefficients) कहलाते हैं।

सामान्य पद का  $p_{n+1}$  से अभिधान करने पर

$$p_{n+1} = s \cdot c_n \cdot y^n$$

$$= \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} \times y^n$$

$$= \frac{s}{n} \frac{s-1}{s-n} y^n$$

इससे

$$(1+y)^s = 1 + sy + \frac{s(s-1)}{2} y^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6} y^3 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{n} y^n + \dots + y^s$$

यह द्विपद विस्तार का सरलतम रूप है। अब  $(y+r)^s$  के समान स-घातीय द्विपद विस्तार, उस विस्तार पर अवलंबित किया जा सकता है जिसमें प्रथम पद एक हो। इस के पश्चात् ऊपर दिए गए द्विपद प्रमेय के सरलतम रूप का उपयोग किया जा सकता है। यह इन उदाहरणों से स्पष्ट होगा—

उदाहरण १—  $(y+r)^s$  का विस्तार करो।

$$\text{अप्र } (y+r)^s = \left[ y \left( 1 + \frac{r}{y} \right) \right]^s$$

$$= y^s \left( 1 + \frac{r}{y} \right)^s$$

$$\frac{r}{y} = l \text{ रखने पर}$$

$$(y+r)^s = y^s (1+l)^s$$

$$= y^s [1 + \cancel{s}l + \cancel{s}l^2 + \dots + \cancel{s}l^{s-1} + \dots + \cancel{s}l^s]$$

$$= y^s [1 + \cancel{s}l + \frac{r}{y} + \cancel{s}l + \frac{r^2}{y^2} + \dots + \dots + \dots]$$

$$+ \cancel{s}l + \frac{r^2}{y^2} + \dots + \cancel{s}l + \frac{r^s}{y^s}$$

$$= y^s + \cancel{s}l + r y^{s-1} + \cancel{s}l + r^2 y^{s-2} + \dots + \dots + \dots$$

$$\dots + \cancel{s}l + r^{s-1} y + \dots + \cancel{s}l + r^s$$

उदाहरण २—  $(y+k)^4$  का विस्तार करो।

$$(y+k)^4 = y^4 + {}^4C_1 k y^3 + {}^4C_2 k^2 y^2 + {}^4C_3 k^3 y + {}^4C_4 k^4$$

$$+ {}^4C_1 k^3 y + {}^4C_2 k^2 y^2 + {}^4C_3 k^3 y + {}^4C_4 k^4$$

$$+ {}^4C_4 k^4$$

$$= y^4 + 4ky^3 + 6k^2y^2 + 4k^3y + k^4$$

$$+ 4k^3y + 6k^2y^2 + 4k^3y + k^4$$

उदाहरण ३—  $(२य-२)^५$  का विस्तार करो।

$(य+क)^५$  से  $(२य-२)^५$  की तुलना करने पर यह ज्ञात होता है कि इस द्विपद में य के स्थान पर २य है और क के स्थान पर  $(-२)$  है। पिछले उदाहरण की रीति का अनुसरण करने पर

$$\begin{aligned}(२य-२)^५ &= (२य)^५ + {}^५C_१ (-२) (२य)^४ \\ &\quad + {}^५C_२ (-२)^२ (२य)^३ + {}^५C_३ (-२)^३ (२य)^२ \\ &\quad + {}^५C_४ (-२)^४ (२य) + {}^५C_५ (-२)^५ \\ &= ३२ य^५ - ८० र य^४ + ८० र^२ य^३ - ४० र^३ य^२ \\ &\quad + १० र^४ य - २^५\end{aligned}$$

उदाहरण ४—

$(य + \sqrt{३})^५ + (य - \sqrt{३})^५$  की अर्हा निकालो।

$$\begin{aligned}&(य + \sqrt{३})^५ + (य - \sqrt{३})^५ \\ &= [य^५ + {}^५C_१ (\sqrt{३}) य^४ + {}^५C_२ (\sqrt{३})^२ य^३ + {}^५C_३ (\sqrt{३})^३ य^२ \\ &\quad + {}^५C_४ (\sqrt{३})^४ य + {}^५C_५ (\sqrt{३})^५] \\ &\quad + [य^५ + {}^५C_१ (-\sqrt{३}) य^४ + {}^५C_२ (-\sqrt{३})^२ य^३ \\ &\quad + {}^५C_३ (-\sqrt{३})^३ य^२ + {}^५C_४ (-\sqrt{३})^४ य \\ &\quad + {}^५C_५ (-\sqrt{३})^५] \\ &= २ य^५ + २ {}^५C_२ (\sqrt{३})^२ य^३ + २ {}^५C_४ (\sqrt{३})^४ य \\ &= २ य^५ + ६० य^३ + ९० य\end{aligned}$$



११.३ (य+क)<sup>४</sup> के विस्तार में किसी पद को निकालना।

(य+क)<sup>४</sup> के विस्तार में

प्रथम पद य<sup>४</sup> अथवा सच<sup>४</sup> य<sup>४</sup> है।

द्वितीय पद सच<sup>३</sup> क य<sup>३</sup>-<sup>१</sup> है।

तृतीय पद सच<sup>२</sup> क<sup>२</sup> य<sup>२</sup>-<sup>२</sup> है।

चतुर्थ पद सच<sup>१</sup> क<sup>३</sup> य<sup>१</sup>-<sup>३</sup> है.....इत्यदि

इन पदों में ये सामान्य गुण स्पष्ट हैं—

(१) च का पादांक पद-संख्या से १ कम है।

(२) क का घात और च का पादांक एकही है।

(३) क और य के घातों का योग द्विपद के घात के सम है।

अतः यदि (त+१)वें पद का अभिधान प<sub>त+१</sub> से किया जाय

तो प<sub>त+१</sub> = सच<sup>त</sup> क<sup>त</sup> य<sup>त-त</sup>

११.३१ (१+य)<sup>४</sup> के विस्तार में आदि और अन्त से समान पदों में के गुणक समान होते हैं।

यह घात है कि

$$(१+य)^४ = १ + सच, य + सच, य^२ + ... + सच^n य^n + ..... + सच^{४-१} य^{४-१} + य^४$$

इस विस्तार में पदों की संख्या (स+१) है।

आदि से तवें पद में निहित गुणक सच<sup>त-१</sup> के सम है।

अन्त से तवा पद आदि से  $(स+२-त)$  वां पद होगा ।

$$\begin{aligned}\text{अतः इस पद में निहित गुणक} &= {}^s\text{च}_{स+१-त} \\ &= {}^s\text{च}_{स-(स+१-त)} \\ &= {}^s\text{च}_{त-१}\end{aligned}$$

अतः आदि और अन्त से समदूर पदों में निहित गुणक समान होते हैं ।

११.४ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण १—  $(य-२)^४$  के विस्तार में ४वां पद निकालो ।

$$\begin{aligned}\text{४वां पद} &= {}^4\text{च}_३ (-२)^३ य^१ \\ &= -\frac{६ \times ५ \times ४}{१ \times २ \times ३} २^३ य^१ \\ &= -२०२^३ य^१\end{aligned}$$

उदाहरण २—  $(य-क)^{११}$  के विस्तार में १३वां पद निकालो ।

$$\begin{aligned}\text{१३वां पद} &= {}^{११}\text{च}_{१२} (-क)^{१२} य^० \\ &= {}^{११}\text{च}_{१२} क^{१२} य^० \\ &= \frac{१६ \times १५ \times १४ \times १३}{१ \times २ \times ३ \times ४} क^{१२} य^० \\ &= १८२० क^{१२} य^०\end{aligned}$$

उदाहरण ३—  $\left(य^२ - \frac{३}{य}\right)^{१५}$  के विस्तार में  $य^{१८}$  का गुणक निकालो ।

मान लो  $y^{12}$ ,  $(t+1)^{\text{वाँ}}$  पद में आता है।

$$\text{अथ } \left(y^3 - \frac{3}{y}\right)^{14} = y^{42} \cdot \left(1 - \frac{3}{y^3}\right)^{14}$$

$\left(1 - \frac{3}{y^3}\right)^{14}$  के विस्तार का प्रत्येक पद  $y^{3r}$  से गुणित है।

$$\therefore \text{पद}_{t+1} = y^{42} \left[ \left(1 - \frac{3}{y^3}\right)^{14} \text{ के विस्तार का } (t+1)\text{वाँ पद} \right]$$

$$= y^{42} \times {}^{14}\text{चत} \left(-\frac{3}{y^3}\right)^t$$

$$= (-3)^t \times {}^{14}\text{चत} \times y^{42-3t}$$

किन्तु इस पद में  $y$  का घात १८ है।

$$\therefore 42 - 3t = 18$$

$$3t = 24$$

$$t = 8$$

$$\therefore \text{अपेक्षित गुणक} = (-3)^8 \times {}^{14}\text{च}_8$$

$$= \frac{3^8 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$$

$$= 110592$$

उदाहरण ४—  $\left(y + \frac{3}{y^2}\right)^{15}$  के विस्तार में  $y^0$  का गुणक

निकालो ।

मान लो  $\left(y + \frac{g}{y^3}\right)^s$  के विस्तार में  $y^t$ ;  $(t+1)$ वाँ पद में आता है ।

$$\text{अब } \left(y + \frac{g}{y^3}\right)^s = y^s \left(1 + \frac{g}{y^3}\right)^s$$

$$\therefore p_{t+1} = y^s \left[ \left(1 + \frac{g}{y^3}\right)^s \text{ के विस्तार का } (t+1)\text{वाँ पद} \right]$$

$$= y^s \times s c t \left(\frac{g}{y^3}\right)^t$$

$$= s c t \times y^{s-3t} \times g^t$$

किन्तु इस पद में  $y$  का घात  $t$  है

$$\therefore s - 3t = t$$

$$\text{अथवा } t = \frac{s-t}{3}$$

$$\therefore \text{अपेक्षित गुणक} = s c \frac{s-t}{3} g^{\frac{s-t}{3}}$$

$$\frac{\left| \frac{s-t}{3} \right|}{\left| \frac{s-t}{3} \right|} \frac{\left| \frac{s-t}{3} \right|}{\left| \frac{s-t}{3} \right|} g^{\frac{s-t}{3}}$$

## प्रश्नावलि १६

- (१)  $(y-3)(y+8)(y-4)(y+9)$  का विस्तार करो
- (२)  $(x)(y-2)(y+3)(y-4)(y+9)$  के गुणनफल में  $y^3$  का गुणक निकालो।  
 $(x)(y+1)(y+2)(y+3)(y-4)(y-5)(y-6)$  के गुणनफल में  $y^4$  का गुणक निकालो।
- (३) इन द्विपदों का विस्तार करो—  
 (क)  $(y+2)^4$  (ख)  $(2y+3x)^4$   
 (ग)  $(4-8y)^4$  (घ)  $\left(1-\frac{1}{y}\right)^4$   
 (ङ)  $\left(y^2 + \frac{3x}{y}\right)^4$  (च)  $\left(3y - \frac{4}{y^2}\right)^4$
- (४) निम्न-लिखित द्विपद विस्तारों में निर्दिष्ट पद निकालो और सरल करो—  
 (अ)  $(3x^2 - 7y^2)^6$  में ५वाँ पद  
 (आ)  $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{11}$  में ९वाँ पद  
 (इ)  $\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)^{12}$  में ४वाँ पद [कलकत्ता १८८८]

(इ)  $(2y^{\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}})^{20}$  में १९वां पद [कलकत्ता १८७०]

(५)  $(y - y^2)^{10}$  के विस्तार में  $y^{14}$  का गुणक निकालो  
[कलकत्ता १९२६]

(६)  $(k^x - खय^3)^{10}$  के विस्तार में  $y^{10}$  और  $y^{16}$  के गुणक निकालो।  
[कलकत्ता १८७६]

(७)  $(y - 2r)^{12}$  में  $y^{11}$  का गुणक निकालो।  
[कलकत्ता १८८३]

(८)  $(y + \frac{x^3}{y^2})$  के विस्तार में  $\frac{1}{y^2}$  का गुणक निकालो।

(९)  $(3y - \frac{1}{3y})^{100}$  के विस्तार में  $y^{24}$  का गुणक निकालो।

(१०)  $(y - \frac{3k^3}{y^2})^{25}$  के विस्तार में  $y^8$  का गुणक निकालो।

(११)  $(y - y^{-1})^{25}$  के विस्तार में  $(2x + 1)^{10}$  पद निकालो।

(१२) दिखाओ कि  $(1 + y)^{25}$  के विस्तार में  $y^{25}$  का गुणक,  $(1 + y)^{25-1}$  के विस्तार में  $y^{25}$  के गुणक का दुगुना है।

(१३) दिखाओ कि  $(1+y)^{2s}$  के विस्तार में मध्यपद  $\frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2s-1)}{s} 2^s \times y^s$  है।

(१४)  $(x+y)^{2s}$  के विस्तार में मध्यपद निकालो।

(१५)  $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^{2s}$  के विस्तार में मध्यपद निकालो।

(१६)  $\left(y^2 - \frac{x}{y^2}\right)^{2s}$  के विस्तार में  $y$  से स्वतन्त्र पद निकालो।

(१७)  $\left(y + \frac{x}{y}\right)^{2s}$  के विस्तार में  $y$  से स्वतन्त्र पद निकालो।

(१८)  $\left(y^2 + \frac{x}{y}\right)^{2s}$  के विस्तार में  $y$  से स्वतन्त्र पद निकालो। [कलकत्ता १९३४]

(१९)  $\left(2y + \frac{x}{y^2}\right)^s$  के विस्तार में  $y$  से स्वतन्त्र पद निकालो। [कलकत्ता १९३६]

(२०) यदि  $(1+y)^{2n}$  के विस्तार में  $(2n+1)^{\text{वाँ}}$  पद में निहित गुणक  $(n+2)^{\text{वाँ}}$  पद में निहित गुणक के सम हो तो  $n$  की अर्धा निकालो। [पटना १९३०]

(२१) यदि  $(१+य)^{२स+१}$  के विस्तार में  $य^n$  और  $य^{स+१}$  के गुणक समान हों तो  $n$  की अर्हा निकालो।

[कलकत्ता १९३०]

(२२) दिखाओ कि  $(१+य)^{२स}$  के विस्तार में मध्य-पद में निहित गुणक,  $(१+य)^{२स-१}$  के विस्तार में दो मध्य-पदों में निहित गुणकों के योग के सम है।

[कलकत्ता १९१८]

(२३) सिद्ध करो कि  $(१+य)^{२+४}$  के विस्तार में  $य^२$  और  $य^४$  के गुणक समान हैं जहां  $२$  और  $४$  धन पूर्णांक हैं।

(२४) यदि  $(१+य)^{२८}$  के विस्तार में नवें पद में निहित गुणक  $(न+४)य$  पद में निहित गुणक के सम हो तो  $n$  की अर्हा निकालो।

११.५ त्रिपद के विस्तार के लिए भी द्विपद प्रमेय का प्रयोग किया जा सकता है।

उदाहरण—  $(१+य+य^२)^४$  का विस्तार  $य$  के आरोही घातों में करो।

$(य+य^२)$  को एक पद समझ कर, द्विपद प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$\begin{aligned} & [१+(य+य^२)]^४ \\ &= १ + {}^४C_१ (य+य^२) + {}^४C_२ (य+य^२)^२ \\ & \quad + {}^४C_३ (य+य^२)^३ + \dots + (य+य^२)^४ \\ &= १ + {}^४C_१ य(१+य) + {}^४C_२ य^२(१+य)^२ \\ & \quad + {}^४C_३ य^३(१+य)^३ + \dots + य^४(१+य)^४ \end{aligned}$$



अब  $(1+y)^2, (1+y)^3, \dots, (1+y)^n$  का द्विपद प्रमेय के अनुसार विस्तार किया जा सकता है। विस्तार करने पर पदों के पुनर्विन्यास से

$$[1+y+y^2]^n$$

$$= 1 + {}^nC_1 y + ({}^nC_2 + {}^nC_3) y^2 + ({}^nC_3 + 2{}^nC_4 + {}^nC_5) y^3 + \dots$$

प्राप्त होता है।

११.६  $(1+y)^n$  के विस्तार में संख्या की दृष्टि से महत्तम पद निकालना।

$(1+y)^n$  के विस्तार में  $n$  वें और  $(n+1)$  वें पदों पर विचार करो।

$$p_n = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+2)}{1 \times 2 \times 3 \dots (n-1)} y^{n-1}$$

$$p_{n+1} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} y^n$$

$$\therefore \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{s-n+1}{n} y$$

अतः यदि इष्ट सम्यग्ध  $p_{n+1} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} p_n$  हो तो

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 1 \text{ होना चाहिए।}$$

$$\text{किन्तु } \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{s-n+1}{n} \text{ य}$$

$$\text{अतः } \frac{s-n+1}{n} \text{ य } \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 1 \text{ होना चाहिए।}$$

$$\text{अथवा } (s+1) \text{ य } \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} n(1+y) \text{ होना चाहिए।}$$

$$\text{इसलिए } n \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \frac{s+1}{1+y} \text{ य होना चाहिए}$$

$$\text{अतः } n \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \frac{s+1}{1+y} \text{ य तदनुसार } p_{n+1} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} p_n \text{ इष्ट}$$

सम्बन्ध प्राप्त होता है।

प्रश्न १— मान लो राशि  $\frac{s+1}{1+y}$  य धन पूर्णांक त के सम है।

$$\text{अतः } n \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} t \text{ तदनुसार } p_{n+1} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} p_n \text{ होगा}$$

(क) न को १ से (त-१) तक बढ़ाओ।

अथ न की इन सब अर्थाओं के लिए न त से छोटा है।

$$\therefore n=1, 2, 3 \dots (t-1) \text{ के लिए } p_{n+1} > p_n$$

$$\text{अतः } p_t > p_{t-1} > p_{t-2} \dots > p_3 > p_2 > p_1$$

$$\therefore p_1, p_2, p_3 \dots p_t \text{ में } p_t \text{ महत्तम पद है।}$$

(ख)  $n = t$  के लिए  $p_{n+1} = p_n$

अर्थात्  $p_{t+1} = p_t$

(ग)  $n$  को  $t+1$  से  $s$  तक बढ़ाओ।

$n$  की इन अर्थात्ओं के लिए  $n > t$

$\therefore n = (t+1), (t+2), \dots, s$  के लिए

$$p_{n+1} < p_n$$

अर्थात्  $p_{t+1} > p_{t+2} > p_{t+3} \dots > p_{s+1}$

$\therefore p_{t+1}, p_{t+2}, \dots, p_{s+1}$  में  $p_{t+1}$  महत्तम पद है।

अतः यदि  $\frac{s+1}{1+y}$  धन पूर्णांक  $t$  के सम हो तो संख्या

की दृष्टि से  $p_t$  और  $p_{t+1}$  दो महत्तम पद होते हैं तथा वे एक दूसरे के समान होते हैं।

दशा २— मान लो  $\frac{(s+1)}{1+y}$  पूर्णांक नहीं है और मान

लो इसके अनुकूल भाग (integral part) का अभिधान  $y$  से किया गया है।

जैसे  $n$  का  $1$  से  $y$  तक वर्धन होता है  $n$  सदैव

$\frac{s+1}{1+y}$  से छोटा रहता है।

$\therefore n = 1, 2, \dots, y$  के लिए

$$p_{n+1} > p_n$$

अर्थात्  $p_{y+1} > p_y > p_{y-1} \dots > p_2 > p_1 > p_0$

अर्थात्  $p_1, p_2, \dots, p_{y+1}$  में  $p_{y+1}$  महत्तम है।  
 य के पश्चात्  $n$  की आगामी अर्धा  $(y+1)$  है।

अब  $n > y+1$  के लिए  $n, \frac{s+1}{1+y}$  य से बड़ा है।

अतः  $n = y+1, y+2, \dots$  स के लिए  $p_{n+1} < p_n$

$\therefore p_{y+1} > p_{y+2} > p_{y+3} \dots \dots > p_{s+1}$

अतः  $p_{y+1}, p_{y+2}, p_{y+3}, \dots, p_{s+1}$  में स्पष्टतः  $p_{y+1}$  महत्तम है।

अतः  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{s+1}$  में  $p_{y+1}$  महत्तम पद है।

इसलिए जब  $\frac{s+1}{1+y}$  य पूर्णांक नहीं होता और

उसका अनुकूल भाग  $y$  के सम होता है तब  $(y+1)$ वा पद महत्तम होता है।

उदाहरण—  $y = \frac{1}{3}$  के लिए  $(1+4y)^n$  के विस्तार में

महत्तम पद निकालो।

$(1+4y)^n$  के विस्तार में  $n$ वा और  $(n+1)$ वा पद यह है—

$$p_n = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (1-n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)} (4y)^{n-1}$$

$$p_{n+1} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (1-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} (p_y)^n$$

$$\text{अथ } \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1-n+1}{n} (p_y)$$

$$= \frac{10-n}{n} p_y$$

$$= \frac{10-n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)$$

$\left[ y = \frac{1}{3} \text{ रखने से} \right]$

अथ

$$\frac{10-n}{n} \frac{1}{3} \geq 1 \text{ तदनुसार } p_{n+1} \geq p_n \text{ होगा।}$$

$$\text{अथवा } n \leq \frac{10}{3} \text{ तदनुसार } p_{n+1} \geq p_n \text{ होगा।}$$

$n = 1, 2, 3, \dots, 6$  के लिए

$p_{n+1} > p_n$  क्योंकि  $n < \frac{10}{3}$

$$\therefore p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_6 \dots \dots \dots (1)$$

$n = 7, 8, \dots, 9$  के लिए  $n > \frac{10}{3}$

इसलिए  $p_{n+1} < p_n$

$$\text{अतः } p_7 > p_8 > p_9 > p_{10} \dots \dots \dots (2)$$

(1) और (2) से यह स्पष्ट है कि  $p_6$  महत्तम पद है।

$$\text{अथ } p_6 = 'x' (p_y)$$

$$= {}^n\text{च}_3 \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$= \frac{4 \times 4 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{4^3}{3^3}$$

$$= \frac{4 \times 4}{3^2} \times \frac{4^3}{3^3}$$

$$= \frac{4 \times 4 \times 4 \times 4}{3 \times 3}$$

११.७  $(1+y)^n$  के विस्तार में महत्तम गुणक निकालना ।

$(1+y)^n$  के विस्तार में  ${}^n\text{च}_r$  सामान्य पद में निहित गुणक है । अतः केवल यह निश्चय करना है कि  $n$  की किस शक्ति के लिए  ${}^n\text{च}_r$  की शक्ति महत्तम होती है । इस प्रश्न पर नये अध्याय में पहले ही विचार किया जा चुका है ।

अत यदि  $n$  युग्म हो तो महत्तम गुणक  ${}^n\text{च}_{\frac{n}{2}}$  और यदि  $n$  अयुग्म हो तो महत्तम गुणक  ${}^n\text{च}_{\frac{n-1}{2}}$  अथवा  ${}^n\text{च}_{\frac{n+1}{2}}$  होता है और हम दशा में

$${}^n\text{च}_{\frac{n-1}{2}} = {}^n\text{च}_{\frac{n+1}{2}}$$

११.८ द्विपद प्रमेय की उपपत्ति— यदि स घन पूर्णांक हो तो

$$(य + क)^s = य^s + {}^sC_1 य^{s-1} क + {}^sC_2 य^{s-2} क^2 + \dots + {}^sC_{s-1} य य^{s-s+1} क + क^s$$

गणितीय अनुमान से इस प्रमेय की उपपत्ति यहां दी जाती है—

यदि  $s = 1$  तो

$$य + क = य + क \dots\dots\dots (१)$$

अतः द्विपद प्रमेय  $s = 1$  के लिए सत्य है।

पुनः यदि  $s = 2$

$$\begin{aligned} (य + क)^2 &= (य + क)(य + क) && [(१) \text{ के प्रयोग से}] \\ &= य^2 + २कय + क^2 \\ &= य^2 + {}^2C_1 य क + {}^2C_2 क^2 \dots\dots\dots (२) \end{aligned}$$

∴ प्रमेय  $s = 2$  के लिए सत्य है।

पुनश्च यदि  $s = 3$  तो

$$(य + क)^3 = (य + क)(य^2 + {}^2C_1 य क + {}^2C_2 क^2) \dots\dots\dots [(२) \text{ के प्रयोग से}]$$

इसलिए प्रमेय स = ३ के लिए सत्य है।

यह ध्यान में रखना चाहिए कि प्रत्येक फल की उपपत्ति पिछले फल पर अवलंबित की गई है।

अब स की विशेष अर्था के लिए प्रमेय की सत्यता को कल्पना करो। मान लो यह स = म के लिए सत्य है।

अतः

$$[य + क]^म = य^म + मच, कय^{म-१} + मच, क^२ य^{म-२} + \dots + मच_{न-१}, क^{न-१} य^{म-न+१} + मच_{न} क^{न} य^{म-न} + \dots + क^म)$$

दोनों पक्षों का (य + क) से गुणन करने पर

$$\text{याम पक्ष} = (य + क)^{म+१}$$

दक्षिण पक्ष

$$\begin{aligned} &= [य + क] [य^म + मच, कय^{म-१} + मच, क^२ य^{म-२} + \dots + मच_{न-१}, क^{न-१} य^{म-न+१} + मच_{न} क^{न} य^{म-न} + \dots + क^म] \\ &= य^{म+१} + मच, कय^म + मच, क^२ य^{म-१} + \dots + मच_{न-१}, क^{न-१} य^{म-न+२} + मच_{न} क^{न} य^{म-न+१} + मच_{न-१}, क^{म-१} य^१ + क^म, य + कय^म + मच, क^२ य^{म-१} + \dots + मच_{न-१}, क^{न} य^{म-न+१} + \dots + मच_{न-१}, क^म, य + क^{म+१} \\ &= य^{म+१} + [मच, + १] कय^म + [मच, + मच,] क^२ य^{म-१} + \dots \end{aligned}$$



११.८ द्विपद प्रमेय की उपपत्ति— यदि स धन पूर्णांक हो तो

$$(य + क)^स = य^स + सच, कय^{स-१} + सच, क^२य^{स-२} + \dots + सच, क^{स-१}य + क^स$$

गणितीय अनुमान से इस प्रमेय की उपपत्ति यहां दी जाती है—

यदि स = १ तो

$$य + क = य + क \dots\dots\dots (१)$$

अतः द्विपद प्रमेय स = १ के लिए सत्य है।

पुनः यदि स = २

$$(य + क)^२ = (य + क)(य + क) \quad [ (१) \text{ के प्रयोग से } ]$$

$$= य^२ + २कय + क^२$$

$$= य^२ + १च, कय + १च, क^२ \dots\dots\dots (२)$$

∴ प्रमेय स = २ के लिए सत्य है।

पुनश्च यदि स = ३ तो

$$(य + क)^३ = (य + क)(य^२ + १च, कय + १च, क^२)$$

[ (२) के प्रयोग से ]

$$= य^३ + २च, कय^२ + १च, क^२य$$

$$+ कय^२ + १च, क^२य + १च, क^३$$

$$= य^३ + (१च, + १)कय^२$$

$$+ (१च, + १च,) क^२य + क^३$$

$$= य^३ + ३कय^२ + ३क^२य + क^३$$

$$= य^३ + ३च, कय^२ + ३च, क^२य + ३च, क^३$$

इसलिए प्रमेय स = ३ के लिए सत्य है।

यह ध्यान में रखना चाहिए कि प्रत्येक फल की उत्पत्ति पिछले फल पर अवलंबित की गई है।

अब स की विशेष अर्था के लिए प्रमेय की सत्यता को कल्पना करो। मान लो यह स = म के लिए सत्य है।

अतः

$$[y + k]^m = y^m + m \cdot y^{m-1} \cdot k + \frac{m(m-1)}{2} \cdot y^{m-2} \cdot k^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} \cdot y^{m-n} \cdot k^n + \dots + k^m$$

दोनों पक्षों का (य + क) से गुणन करने पर

$$\text{घाम पक्ष} = (y + k)^{m+1}$$

दक्षिण पक्ष

$$= [y + k] [y^m + m \cdot y^{m-1} \cdot k + \frac{m(m-1)}{2} \cdot y^{m-2} \cdot k^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} \cdot y^{m-n} \cdot k^n + \dots + k^m]$$

$$= y^{m+1} + m \cdot y^m \cdot k + \frac{m(m+1)}{2} \cdot y^{m-1} \cdot k^2 + \dots + \frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n)}{(n+1)!} \cdot y^{m-n+1} \cdot k^n + \dots + k^{m+1}$$

$$= y^{m+1} + [m \cdot y^m + 1 \cdot y^m] k + [\frac{m(m+1)}{2} \cdot y^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} \cdot y^{m-1}] k^2 + \dots + k^{m+1}$$

$$+ [{}^m C_n + {}^m C_{n-1}] k^{n-y^{m-n+1}}$$

$$+ \dots + k^{m+1}$$

$$\text{किन्तु } {}^m C_n + {}^m C_{n-1} = {}^{m+1} C_n$$

$$\therefore \text{दक्षिण पक्ष} = y^{m+1} + {}^{m+1} C_1 k y^{m-1} + \dots$$

$$+ {}^{m+1} C_2 k^2 y^{m-2} + \dots$$

$$+ {}^{m+1} C_n k^n y^{m-n+1} + \dots$$

$$+ {}^{m+1} C_m k^m y + k^{m+1}$$

किन्तु यह  $s = m+1$  के लिये द्विपद विस्तार है।

अतः यदि यह कल्पना कि द्विपद प्रमेय  $s$  की किसी विशेष अर्द्धा  $m$  के लिए सत्य हो तो प्रमेय  $s$  की आगामी उच्चतर अर्द्धा अर्थात्  $s = m+1$  के लिए भी सत्य होगा।

यह देखा जा चुका है कि  $s=1$  अतएव  $s=2, 3$  के लिए द्विपद प्रमेय सत्य है। प्रमेय  $s=3$  के लिए सत्य है इसलिए,  $s$  की आगामी उच्चतर अर्द्धा अर्थात्  $s=4$  के लिए भी सत्य है।  $s$  की आगामी उच्चतर अर्द्धा अर्थात्  $s=5$  के लिए भी सत्य है।

इस विधा के लगातार प्रयोग से अन्ततः यह दिखाया जा सकता है कि  $s$  की सब धन पूर्णांक अर्द्धाओं के लिए यह प्रमेय सत्य है।

११.९. द्विपद गुणक (binomial coefficients)  $(1+y)^s$  के विस्तार में अर्थात्

$1 + {}^s C_1 y + {}^s C_2 y^2 + \dots + {}^s C_n y^n + \dots + {}^s C_s y^s$   
में  ${}^s C_1, {}^s C_2, {}^s C_3, \dots, {}^s C_n$  द्विपद गुणक कहलाते

हैं। निम्न-लिखित प्रश्नों में  $\chi_n$ ,  $\chi_n^s$  का अभिधान करेगा।

उपर्युक्त विस्तार में  $y$  को विभिन्न अर्थात् देने से अनेक ऐकात्म्य प्राप्त किए जा सकते हैं।

(१) गुणकों का योग— यह ज्ञात है कि

$(1+y)^s$

$$= \chi_0 + \chi_1 y + \chi_2 y^2 + \dots + \chi_n y^n + \dots + \chi_s y^s$$

[ $\chi_0 = 1$ , तथा  $\chi_s = 1$ ]

इस सम्यन्ध में  $y = 1$  रखो।

$$\therefore 2^s = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2 + \dots + \chi_n + \dots + \chi_s$$

= गुणकों का योग।

$$\text{अतः } \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \dots + \chi_s = 2^s - 1$$

(२)  $(1+y)^s$  के विस्तार में अयुग्म पदों में निहित गुणकों का योग युग्म पदों में निहित गुणकों के योग के सम होता है।

$$(1+y)^s = \chi_0 + \chi_1 y + \chi_2 y^2 + \dots + \chi_s y^s$$

इस सम्यन्ध में  $y = -1$  रखो।

$$\therefore 0 = \chi_0 - \chi_1 + \chi_2 - \chi_3 + \dots + \chi_s (-1)^s$$

$$\therefore \chi_0 + \chi_2 + \chi_4 + \dots = \chi_1 + \chi_3 + \chi_5 + \dots$$

$$\text{उपप्रेम्य— } \chi_0 + \chi_2 + \chi_4 + \dots = \chi_1 + \chi_3$$

$$+ \chi_5 + \dots = 2^{s-1}$$

यह ज्ञात है कि

$$\chi_0 + \chi_2 + \chi_4 + \dots = \chi_1 + \chi_3 + \chi_5 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} [\text{सब गुणकों का योग}]$$

$$= \frac{1}{2} 2^s$$

$$= 2^{s-1}$$

१४.९१ ये साधित प्रश्न बोधात्मक हैं—

उदाहरण १— दिखाओ कि

$$च_1 + २च_२ + ३च_३ + ..... + न च_n + ..... + सच_s \\ = स \times 2^{s-1}$$

यह ज्ञात है कि

$$\begin{aligned} & च_1 + २च_२ + ३च_३ + ..... + नच_n + ..... सच_s \\ &= \left[ स + \frac{२स(स-१)}{१ \times २} + ३ \frac{स(स-१)(स-२)}{१ \times २ \times ३} \right. \\ & \quad \left. + ..... + \frac{न | स}{| न | स - न} + ..... + स \right] \\ &= स \left[ १ + (स-१) + \frac{(स-१)(स-२)}{१ \times २} + ..... \right. \\ & \quad \left. + \frac{| स-१ |}{| न-१ | स-१-(न-१)} + ... + १ \right] \\ &= स [स^{-१}च_० + स^{-१}च_१ + स^{-१}च_२ + ... + स^{-१}च_{न-१} \\ & \quad + ..... + स^{-१}च_{स-१}] \\ &= स \times 2^{s-1} \end{aligned}$$

उदाहरण २— दिखाओ कि

$$\begin{aligned} \text{सच.} &= \frac{1}{2} \text{सच}_1 + \frac{1}{3} \text{सच}_2 + \dots \\ &\dots + \frac{(-)^s \text{सच}_s}{s+1} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

यह ज्ञात है कि

$$\begin{aligned} \text{सच.} &= \frac{1}{2} \text{सच}_1 + \frac{1}{3} \text{सच}_2 + \dots + (-)^s \frac{1}{s+1} \times \text{सच}_s \\ &= 1 - \frac{s}{2} + \frac{s(s-1)}{1 \times 2 \times 3} + \dots + (-)^s \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{1}{s+1} \left[ (s+1) - \frac{(s+1)s}{1 \times 2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(s+1)s(s-1)}{1 \times 2 \times 3} + \dots + (-)^s \right] \\ &= \frac{1}{s+1} \left[ s+1\text{च}_1 - s+1\text{च}_2 + s+1\text{च}_3 \right. \\ &\quad \left. + \dots + (-)^s \text{च}_{s+1} \right] \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1} \left[ 1 - s+1\text{च}_1 + s+1\text{च}_2 - s+1\text{च}_3 \right. \\ &\quad \left. + \dots + (-)^{s+1} s+1\text{च}_{s+1} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+1} [1-1]^{s+1}$$

$$= \frac{1}{s+1}$$

उदाहरण ३— यदि  $च_0, च_1, च_2, \dots, च_s$  य  $(1+y)^s$  के विस्तार में गुणकों का अभिधान करते हों तो सिद्ध करो कि

$$\begin{aligned} ३च_० + ३^२ \frac{च_१}{२} + ३^३ \frac{च_२}{३} + \dots + \frac{३^{s+१}च_s}{s+१} \\ = \frac{४^{s+१}-१}{s+१} \end{aligned}$$

अथ

$$\begin{aligned} ३च_० + ३^२ \frac{च_१}{२} + ३^३ \frac{च_२}{३} + \dots + \frac{३^{s+१}च_s}{s+१} \\ = \frac{१}{s+१} \left[ ३(s+१)च_० + ३^२(s+१)\frac{च_१}{२} \right. \\ \left. + \frac{३^३(s+१)च_२}{३} + \dots + ३^{s+१}च_s \right] \\ = \frac{१}{s+१} \left[ \left\{ १ + ३(s+१) + \frac{३^२(s+१)s}{१ \times २} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{३^३(s+१)(s)(s-१)}{१ \times २ \times ३} + \dots + ३^{s+१} \right\} - १ \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s+1} \left[ s+1, \text{च.} + s+1, \text{च.}, 2 + s+1, \text{च.}, 2^2 + s+1, \text{च.}, 2^3 \right. \\ \left. + \dots + s+1, \text{च.}, s+1, 2^{s+1} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{s+1} \left[ (1+2)^{s+1} - 1 \right]$$

$$= \frac{2^{s+1} - 1}{s+1}$$

उदाहरण ४— यदि च., च., च., ..... च.

ये  $(1+y)^s$  के विस्तार में गुणकों का अभिधान करते हों तो सिद्ध करो कि

$$\text{च.च.} + \text{च.च.}, 2 + \text{च.च.}, 2^2 + \dots + \text{च.स.}, 2^s \\ = \frac{2s}{s-1} \frac{1}{s+1}$$

यह ज्ञात है कि

$$(1+y)^s = \text{च.} + \text{च.}, y + \text{च.}, y^2 + \text{च.}, y^3 + \dots \\ + \text{च.}, y^n + \dots + \text{च.स.}, y^s \dots \dots \dots (1)$$

$$\left(1 + \frac{y}{y}\right)^s = \text{च.} + \frac{\text{च.}, y}{y} + \frac{\text{च.}, y^2}{y^2} + \frac{\text{च.}, y^3}{y^3} + \dots + \frac{\text{च.}, y^n}{y^n} + \dots \\ \dots + \frac{\text{च.स.}, y^s}{y^s} \dots \dots \dots (2)$$



(१) और (२) का गुणन करो ।

$$\therefore \frac{(1+y)^{2s}}{y^s}$$

$$= [च. + च.य + च.य^2 + \dots + च.य^n + \dots + च.य^s]$$

$$\times \left[ च. + \frac{च.}{य} + \frac{च.}{य^2} + \dots + \frac{च.}{य^n} + \dots + \frac{च.}{य^s} \right]$$

.....(३)

अथ  $\frac{(1+y)^{2s}}{y^s}$

$$= \frac{1}{y^s} [ \cdot^0 च. + \cdot^1 च.य + \cdot^2 च.य^2 + \dots + \cdot^{2s-1} च.य^{s-1} + \cdot^{2s} च.य^s ]$$

इस विस्तार में  $\frac{1}{y^s} \cdot \frac{1}{y^{s-1}} \dots \frac{1}{y} \cdot य, य^2 \dots य^{s-1}, य^s$

इनको धारण करने वाले पद प्राप्त होंगे ।

(३) में वाम पक्ष, दक्षिण पक्ष के सदाँग सम है । अपेक्षित योग, (३) में दक्षिण पक्ष के गुणनफल में  $\frac{1}{य}$  अथवा य का गुणक है । इसका, वाम पक्ष के  $\frac{1}{य}$  अथवा य के गुणक से समीकरण करने पर

$$च.च. + च.च. + \dots = \cdot^{2s} च.य^{s-1} \text{ प्राप्त होता है ।}$$

$$(2) \left(1 - \frac{y}{2}\right)^{12} \text{ जब } y = \frac{3}{2}$$

$$(3) (1 + 2y)^{10} \text{ जब } y = \frac{3}{2}$$

$$(4) \left(2 - \frac{y}{4}\right)^{10} \text{ जब } y = \frac{8}{5}$$

निम्न-लिखित प्रश्नों में  $ch_0, ch_1, \dots, ch_n$  ये  $(1+y)^n$  के विस्तार में द्विपद गुणकों का अभिधान करते हैं।

(7)  $ch_0 + 2ch_1 + 3ch_2 + \dots + (n+1)ch_n$  की सही निकालो।

सिद्ध करो कि

$$(8) \frac{ch_1}{ch_0} + \frac{2ch_2}{ch_1} + \frac{3ch_3}{ch_2} + \dots + \frac{nch_n}{ch_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(9) (ch_0 + ch_1)(ch_1 + ch_2) \dots (ch_{n-1} + ch_n) \\ = \frac{ch_0 ch_1 ch_2 \dots ch_n (n+1)^n}{(n!)^2}$$

$$(10) ch_0 ch_1 + ch_1 ch_2 + \dots + ch_{n-1} ch_n$$

$$= \frac{n(n+1)}{(n-2)(n+2)}$$

$$(11) \quad x, x+n, x+n+1, \dots + x_{s-n}$$

$$= \frac{|2s|}{|s-n| s+n}$$

(12) स की युग्म अथवा अयुग्म अर्हानुसार  
 $x,^2 - x,^2 + x,^2 - x,^2 + \dots + (-)^s x_s^2$  की

अर्ह शून्य अथवा  $\frac{(-1) |s|}{(|s|)^2}$  होगी।

$$(13) \quad x, + \frac{x,}{2} + \frac{x,}{3} + \dots + \frac{x_s}{s+1} = \frac{2s+1-1}{s+1}$$

$$(14) \quad 2x, + 4x, + 6x, + \dots + (2s+2)x_s = (2s+4)2^{s-1}$$

(15)  $(1+y)^{m+s} = (1+y)^m (1+y)^s$  इस ऐकात्म्य का प्रयोग कर के, सिद्ध करो कि

$${}^{m+s}x_n = {}^m x_n + {}^{m+s-1}x_1 + \dots + {}^{m+s-1}x_1 + \dots + {}^s x_n$$

## चारहवां अध्याय

### द्विपद प्रमेय

कोई भी घात

१२.१ यह पहले ही बताया जा चुका है कि यदि  $s$  घन पूर्णांक हो तो

$$(1+y)^s = 1 + {}^sC_1 y + {}^sC_2 y^2 + \dots + {}^sC_n y^n + \dots + y^s$$

$$\text{अथवा} \quad = 1 + s y + \frac{s(s-1)}{1 \times 2} y^2 + \dots$$

$$+ \frac{s}{n} \frac{s-n}{s-n} y^n + \dots + y^n$$

यह ध्यान में रखना आवश्यक है कि उक्त विस्तार में (१) पदों की संख्या परिमित है और  $(s+1)$  के सम है (२) यह विस्तार  $y$  की सब भर्जाओं के लिए सत्य है।

$$\text{अतः } 1 + s y + \frac{s(s-1)}{1 \times 2} y^2 + \dots + y^s \text{ इस}$$

सान्त श्रेढी को लिखने का  $(1+y)^n$  संक्षिप्त रूप है। इसमें यह अर्थ निहित है कि  $(1+y)^n$  और

$$1 + ny + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} y^2 + \dots + y^n \text{ ये दो}$$

पदसंहतियां परस्पर समार्ह (equivalent to one another) हैं। किसी भी घात के लिए द्विपद विस्तरण की रीति बतलाने के पहले उपर्युक्त समार्हता का ध्यान रखते हुए इन साधित प्रश्नों का अध्ययन करना ठीक होगा।

१२.२  $1 + 4y + 6y^2 + 4y^3$  का  $1 + 2y$  से भाजन करने पर लब्धि को  $y$  के आरोही घातों में व्यक्त करो। साधारण भाजन क्रिया से यह फल प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r}
 1 + 2y \quad | \quad 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 \quad | \quad 1 + 2y + 4y^2 \\
 \underline{1 + 2y} \phantom{+ 4y^2 + 4y^3} \phantom{|} \phantom{1 + 2y + 4y^2} \\
 2y + 4y^2 \phantom{+ 4y^3} \phantom{|} \phantom{1 + 2y + 4y^2} \\
 \underline{+ 2y + 4y^2} \phantom{+ 4y^3} \phantom{|} \phantom{1 + 2y + 4y^2} \\
 \hline
 \phantom{1 + 2y +} 4y^2 + 4y^3 \phantom{|} \phantom{1 + 2y + 4y^2} \\
 \phantom{1 + 2y +} 4y^2 + 4y^3 \phantom{|} \phantom{1 + 2y + 4y^2} \\
 \hline
 \phantom{1 + 2y +} \phantom{4y^2 +} 0 \phantom{|} \phantom{1 + 2y + 4y^2}
 \end{array}$$

इस क्रिया में शेष न रहने के कारण भाजन विधा का अवसान होता है।

$$\text{अतः } \frac{1 + ४य + ८य^२ + ८य^३}{१ + २य} = १ + २य + ४य^३$$

घाम पक्ष का प्रतिनिधान दक्षिण पक्ष की पदसंहाति करती है।

अब यदि १ का (१-य) से भाजन किया जाय तो लब्धि य के आरोही घातों श्रेणी के रूप में प्राप्त होगी और भाजन विधा का कभी अवसान न होगा।

लब्धि का  $१ + य + य^२ + \dots$  यावदनन्ति, रूप होगा।

अब दोनों दशाओं में भाजन विधा का आधय लिया गया है। पहली दशा में य की किसी भी अर्हा के लिए सम्पूर्ण लब्धि प्राप्त होती है और यह इस प्रकार लिखी जा सकती है।

$$\frac{१ + ४य + ८य^२ + ८य^३}{१ + २य} = १ + २य + ४य^३ \text{ और यह य}$$

की सब अर्हाओं के लिए सत्य है।

अथवा दक्षिण पक्ष य की सब अर्हाओं के लिए घाम पक्ष का प्रतिनिधान करता है।

दूसरी दशा में भाजन विधा अपूर्ण रहती है और भजन-फल में अनन्त श्रेणी प्राप्त होती है। अब प्रश्न यह है की इस

फल का निर्वचन किस प्रकार किया जाय ? क्या  $\frac{१}{१-य}$ , य

की सब अर्हाओं के लिए  $१ + य + य^२ + \dots$  का प्रतिनिधान कर सकता है ?

इसका निश्चय करने के लिए इस रीति का अनुसरण किया जायगा ।

$y=3$  लेने से

$$\frac{1}{1-y} = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

और  $1+y+y^2+\dots$  यावदनन्ति (up to infinity)  
 $= 1+3+3^2+\dots$  यावदनन्ति ।

अतः  $-\frac{1}{2}$  को  $(1+3+3^2+\dots)$  यावदनन्ति ) का

प्रतिनिधान करना होगा अर्थात् ऋण राशि घन राशियों के योग का प्रतिनिधान करेगी । किन्तु यह असंगत है । अतः

$\frac{1}{1-y}$  व्यंजक  $(1+y+y^2+\dots)$  का प्रतिनिधान, य

की किसी भी और प्रत्येक अर्था के लिए नहीं कर सकता ।

इसके लिए धेटियों के अभिसार और अपसार (convergence and divergence) का पर्यालोचन आवश्यक हो जाता है । किन्तु यह विषय इस पुस्तक के क्षेत्र के बाहर है । इस कारण अनुसंधान की रीति का निर्देश यहां स्थूल रूप से किया जायगा ।

हम अनन्त धेटों के स पदों का योग लेकर स के अति महान् होने पर इस योग के आचरण का अवलोकन करो ।

अब  $1+y+y^2+\dots+y^{n-1}$  इस धेटों के स

पदों का योग  $\frac{1-y^s}{1-y}$  है। अतः स पदों के योग का अभिधान  
योग से करने पर

$$\begin{aligned}\text{योग} &= \frac{1-y^s}{1-y} \\ &= \frac{1}{1-y} - \frac{y^s}{1-y}\end{aligned}$$

है। (अ) मान लो  $y$  की अर्धांश  $-1$  और  $+1$  के बीच में

अर्थात् मान लो  $-1 < y < 1$

$y$  की अर्धांशों पर उपर्युक्त नियन्ध होने से जैसे जैसे  $s$  की महान् से महत्तर अर्धांश ली जायंगी वैसे वैसे  $y^s$  की अर्धांश न्यून से न्यूनतर होती जायंगी।

अतः यदि  $-1 < y < 1$  और  $s \rightarrow \infty$  हो तो

$$\frac{y^s}{1-y} \rightarrow 0$$

इसलिए  $\frac{1}{1-y} - \frac{y^s}{1-y}$  सीमान्ती (in the limit)

$\frac{1}{1-y}$  की अर्धांश के निकट आता है।

इससे  $y$  की  $-1 < y < 1$  अर्धांशों के लिए  $1+y+y^2+y^3+\dots$  इस श्रृंखला के स पदों का योग  $s$  के अनियत वर्धन करने पर लगभग  $\frac{1}{1-y}$  के सम होता है।



यकी अर्हा पर इस नियंध को रख कर  $\frac{1}{1-y}$  को अनन्त श्रेढी का समाहर् लिया जा सकता है। इस दशा में यह कहा जायगा कि  $1+y+y^2+\dots$  यह अनन्त श्रेढी का

$-1 < y < 1$  के लिए,  $\frac{1}{1-y}$  अर्हा पर अभिसरण होता है।

(आ) मान लो  $y > 1$  अथवा  $< -1$  उदाहरणार्थ  $y=2$  अथवा  $y=-2$

$$1+y+y^2+\dots+y^{s-1} = \frac{1}{1-y} - \frac{y^s}{1-y}$$

$y^s$  की संख्यात्मक अर्हा स की अर्हा बढ़ने के साथ साथ बढ़ती है। अतः  $\frac{y^s}{1-y}$  की संख्यात्मक अर्हा भी स के बढ़ने के

साथ साथ बढ़ती है। स को जितना ही बढ़ाया जाय उतना ही

$1+y+y^2+\dots+y^{s-1}$  की अर्हा  $\frac{1}{1-y} - \frac{y^s}{1-y}$  की अर्हा

और  $\frac{1}{1-y}$  का अन्तर बढ़ता ही जाता है। अतः जैसे  $s \rightarrow \infty$

$1+y+y^2+\dots$  इस श्रेढी के प्रथम स पदों का योग  $\frac{1}{1-y}$  की अर्हा के निकट नहीं आता।

अतः  $1+y+y^2+\dots$  इस श्रेढी का प्रतिनिधान करने के लिए  $\frac{1}{1-y}$  का प्रयोग नहीं किया जा सकता।

अर्थात् यह नहीं कहा जा सकता कि संख्या की दृष्टि से

$$y > 1 \text{ के लिए } \frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+\dots\dots\dots$$

इस प्रकार की श्रेणियाँ अपसारी (divergent) श्रेणियाँ कहलाती हैं।

१२.२१ गत अनुच्छेद के पर्यालोचन से ये फल प्राप्त होते हैं।

यदि  $-1 < y < 1$  हो तो जैसे  $s \rightarrow \infty$

$$1+y+y^2+\dots+y^{s-1} \text{ श्रेणी के } s \text{ पदों का योग } \frac{1}{1-y}$$

की अर्था के निकट आता है। और सीमान्ती

$$\frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+\dots \text{ याचदनन्ति लिख सकते हैं।}$$

यदि संख्यात्मक दृष्टि से  $y > 1$  हो तो

$$\frac{1}{1-y} = 1+y+y^2+\dots \text{ याचदनन्ति लिखना असंगत होगा।}$$

१२.३ अनन्त श्रेणी के अन्य उदाहरण—

अब  $(1+y)^2$  की अर्था मूलक्रिया से निकालो।

$$\begin{aligned} (1+y)^2 &= [(1+y)^2]^2 \\ &= [1+2y+2y^2+y^3]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 3y + 3y^2 + y^3 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{24}y^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + \frac{3}{2}y \\ \frac{3}{2}y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 3y + \frac{3}{2}y^2 \\ \frac{3}{2}y^2 \end{array}$$

$$x + 3y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{24}y^3$$

$$\begin{array}{l} x + 3y + 3y^2 + y^3 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3y + 3y^2 \\ 3y + \frac{3}{2}y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{3}{2}y^2 + y^3 \\ \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}y^3 + \frac{1}{24}y^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{y^3}{2} - \frac{1}{24}y^4 \\ -\frac{y^3}{2} - \frac{3y^3}{24} - \frac{3y^4}{24} + \frac{y^4}{24} \\ + + + - \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{3}{24}y^3 + \frac{3y^3}{24} - \frac{y^4}{24} \end{array}$$

अर्थात्

$$(1+y)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{24}y^3 + \dots$$

यह प्राप्त होता है। इस विधा का अयसान नहीं होता और दक्षिण पक्ष में पदों की पूर्वानुपरता रहती है। य की वृत्त अर्थात् के लिए, यदि दक्षिण पक्ष की श्रेणी से  $(1+y)^{\frac{3}{2}}$  की लगभग शुद्ध अर्थात् प्राप्त करनी हो तो बहुत से पद लेने होंगे। गुणकों की रचना पर लागू होन वाले नियम श्रेणी प्राप्त करने की इस रीति में सरलता से ज्ञात नहीं हो सकते।

१२.४ गत अनुच्छेद के अनुसार  $(1+y)^{\frac{3}{2}}$  का प्रतिनिधान, य की कुछ अर्थात्ओं के लिए अनन्त श्रेणी से हो सकता है।

अब प्रश्न यह है कि स के घन पूर्णांक न होने पर य की नियन्त्रित (restricted) अर्थात्ओं के लिए भी  $(1+y)^{\frac{3}{2}}$  के द्विघात-विस्तार का समाई रूप किस प्रकार लिखा जाय ?

इस प्रयोजन से वर्गमूल और भाजन क्रिया से क्रमशः  $(1+y)^{\frac{3}{2}}$  और  $(1+y)^{-1}$  के लिए प्राप्त पदों की तुलना,  $(1+y)^{\frac{3}{2}}$  के

$$1 + sy + \frac{s(s-1)}{1 \times 2}y^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1 \times 2 \times 3}y^3 \dots (1)$$

इस रूप के विस्तार के पदों से जो स की घन पूर्णांक अर्थात् के लिए सत्य है, करनी चाहिए। यह ज्ञात है कि

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots \dots \dots (-1 < y < 1)$$

$$\begin{aligned} \text{इसे } 1 + (-1)(-y) + \frac{(-1)(-2)}{1 \times 2} \times (-y)^2 \\ + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \times 2 \times 3} (-y)^3 + \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2)$$

इस प्रकार लिख सकते हैं । . .

$$\begin{aligned} \text{और } (1+y)^{\frac{3}{2}} &= 1 + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{16}y^3 \dots \dots \\ &= 1 + \frac{3}{2}y + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{1 \times 2}y^2 \\ &\quad + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{1 \times 2 \times 3}y^3 \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

इस प्रकार लिख सकते हैं ।

अब (१) में  $s = -1$  रखने से और  $y$  का  $-y$  में परिवर्तन करने से

$$\begin{aligned} 1 + (-1)(-y) + \frac{(-1)(-2)}{1 \times 2} (-y)^2 \\ + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \times 2 \times 3} (-y)^3 + \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

प्राप्त होता है ।

और (१) में  $s = \frac{3}{2}$  रखने से

$$1 + \frac{3}{2}y + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{1 \times 2}y^2 + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{1 \times 2 \times 3}y^3 + \dots \dots \dots (4)$$

प्राप्त होता है,

(२) और (३) के पदों की तुलना क्रमशः (४) और (५) के पदों के साथ करने से, यह ज्ञात होता है कि (२) और (३) के विभिन्न पद क्रमशः  $(1+y)^s$  के विस्तार से इन साधारण आदेशों से प्राप्त है,

(क)  $s = -1$  और  $y$  का  $-y$  में परिवर्तन

(ख)  $s = \frac{3}{2}$

भाजन और घर्गमूल निफालने की क्रियाओं से अथवा  $(1+y)^s$  के विस्तार में यथेष्ट आदेश करने से एक्स फल प्राप्त होते हैं। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि  $s$  की ऋण और भिन्न अर्धान्तरों के लिये, जब  $y$  की अर्दा पर विशेष निर्बंध हो तो  $(1+y)^s$  का विस्तार

$$1 + sy + \frac{s(s-1)}{1 \times 2}y^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1 \times 2 \times 3}y^3 + \dots$$

इस रूप में संभव है।

अब प्रमेय को अन्तिम रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं

$$(1+y)^s = 1 + s y + \frac{s(s-1)}{1 \times 2} y^2$$

$$+ \frac{s(s-1)(s-2)}{1 \times 2 \times 3} y^3 + \dots \dots \text{यह विस्तार}$$

(क) स के घन पूर्णांक रहने पर य की सब अर्थाओं के लिए और

(ख) यदि  $-1 < y < 1$  हो तो स की सब अर्थाओं के लिए सत्य है।

स की किसी भी अर्था के लिए, इस प्रमेय का उपपादन, इस पुस्तक के क्षेत्र के बाहर है।

१२४१ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण १—  $(1-y)^{\frac{5}{3}}$  का ४ पदों तक विस्तार करो।

$$\begin{aligned} (1-y)^{\frac{5}{3}} &= 1 + \frac{\frac{5}{3}}{1} (-y) + \frac{\frac{5}{3}(\frac{5}{3}-1)}{1 \times 2} (-y)^2 \\ &\quad + \frac{\frac{5}{3}(\frac{5}{3}-1)(\frac{5}{3}-2)}{1 \times 2 \times 3} (-y)^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{5}{3}y + \frac{5}{6}y^2 - \frac{5}{12}y^3 + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

उदाहरण २—  $(3+4y)^{-4}$  का ४ पदों तक विस्तार करो।

$$(3+4y)^{-4} = 3^{-4} \left[ 1 + \frac{4}{3}y \right]^{-4}$$

$$= \frac{1}{3^4} \left[ 1 + (-4) \left( \frac{4}{3} y \right) + \frac{(-4)(-4-1)(4)}{1 \times 2} \left( \frac{4}{3} y \right)^2 + \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)(4)}{1 \times 2 \times 3} \left( \frac{4}{3} y \right)^3 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{3^4} \left[ 1 - \frac{20}{3} y + \frac{60}{3} y^2 - \frac{2240}{27} y^3 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{243} - \frac{20}{729} y + \frac{60}{729} y^2 - \frac{2240}{6561} y^3 + \dots$$

१२.५  $(1+y)^n$  के विस्तार में सामान्य पद—

$$\text{अब } (1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} y^3 + \dots$$

यदि  $p_{n+1}$  से सामान्य पद का अभिधान किया जाय तो सामान्य पद  $= (n+1)^{\text{वाँ पद}} = p_{n+1}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} y^n$$

सामान्य पद में निहित गुणक के अंश में का कोई खण्ड शून्य के सम हुए बिना वह गुणक सभी शून्य के सम न होगा। क्योंकि न धन पूर्णांक है इसलिए स के धन पूर्णांक हुए बिना अंश का कोई खण्ड शून्य नहीं हो सकता। अतः यदि स धन पूर्णांक न हो तो  $(1+y)^n$  के विस्तार में पदों की संख्या अनन्त होगी।



## १२.५१ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण १—  $(1-y)^{-\frac{1}{2}}$  के विस्तार में सामान्य पद निकालो।

$(n+1)$ वां पद

$$= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2) \dots (-\frac{1}{2}-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} (-y)^n$$

$$= \frac{(-1)(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2}) \dots (-\frac{2n+1}{2})}{2^n \times 1 \times 2 \times 3 \dots n} (-y)^n$$

अंश में खण्डों की संख्या  $n$  है और वे सब ऋण हैं।

अतः  $(n+1)$ वां पद

$$= (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1)}{2^n \times 1 \times 2 \times 3 \dots n} y^n$$

$$= \frac{1 \times 3 \times 5 \dots (2n-1)}{2^n n} y^n$$

उदाहरण २—  $(1-y)^{-2}$  के विस्तार में सामान्य पद निकालो।

$(n+1)$ वां पद

$$= \frac{(-2)(-3)(-4) \dots (-2-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} (-y)^n$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 4 \dots n (n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} y^n$$

=  $(n+1)y^n$  [अंश और हर के उभय साधारण  
खण्डों का लोप करने से]

१२.५२  $(1-y)^{-n}$  के विस्तार में साधारण पद को  
सरल रूप में निकालना—

$(n+1)^{\text{वाँ पद}}$

$$= \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)\dots(-s-n+1)(-y)^n}{1 \times 2 \times 3 \dots n}$$

$$= (-1)^n \frac{(s)(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)(-y)^n}{1 \times 2 \times 3 \dots n}$$

$$= (-1)^n \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{n} y^n$$

$$= \frac{s(s+1)(s+2)\dots(s+n-1)}{n} y^n$$

इससे यह ज्ञात होता है कि  $(1-y)^{-s}$  के विस्तार में  
प्रत्येक पद धन है।

स को १, २, ३..... अर्थात् देने पर

$$(1-y)^{-1} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots + y^n + \dots$$

$$(1-y)^{-2} = 1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + \dots$$

$$\dots + (n+1)y^n + \dots$$

$$(1-y)^{-2} = 1 + 2y + 4y^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \times 2} y^n + \dots$$

प्राप्त होते हैं।

उदाहरण १—  $\frac{1}{1-\sqrt{1-4y}}$  के विस्तार में सामान्य पद निकालो।

$$\text{अथ } \frac{1}{1-\sqrt{1-4y}} = (1-4y)^{-\frac{1}{2}}$$

$(n+1)$ वाँ पद

$$= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\dots(\frac{1}{2}+n-1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} (4y)^n$$

$$= \frac{1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \dots (\frac{1}{2}n-1)}{\frac{1}{2}n} 4^n y^n$$

$$= \frac{1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \dots (\frac{1}{2}n-1)}{n} 4^n y^n$$

१२.६  $(1+y)^n$  के विस्तार में पदों के चिह्न—

$$\begin{aligned} \text{अथ } (1+y)^n &= 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} y^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} y^3 + \dots \end{aligned}$$

इस विस्तार में

$$P_{n+1} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots n} y^n$$

$$P_n = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+2)}{1 \times 2 \times 3 \dots (n-1)} y^{n-1}$$

$$\therefore \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{s-n+1}{n} y$$

अतः  $(1+y)^s$  के विस्तार में  $(n+1)$ वा पद नवें पद का  $\frac{s-n+1}{n} y$  से अर्थात्  $\left(\frac{s+1}{n} - 1\right) y$  से गुणन करने पर प्राप्त होता है।

अब यदि  $(s+1)$  ऋण हो तो  $\left(\frac{s+1}{n} - 1\right)$  सदैव ऋण रहेगा।

पुनः  $(s+1)$  की जगह चाहे जो भी हो  $\left(\frac{s+1}{n} - 1\right)$

यह उस पद के पश्चात् जिसके लिए  $n > s+1$  है सब पदों के लिए ऋण रहेगा।

अतः यदि  $y$  धन हो तो जब तक  $n > s+1$  है  $(n+1)$ वाँ और नवें पदों की निम्नलिखित क्रम रहेगी। इसलिए  $(1+y)^s$  के विस्तार के पद न पदों के पश्चात्, जिनमें  $n$ ,  $(s+1)$  से बड़ा प्रथम धन पूर्णांक है पदान्तर से (alternately) धन और ऋण रहेंगे।

यदि य ऋण हो तो जब तक  $n > s+1$  होगा,  $(n+1)^{\text{वें}}$  और नवें पदों की निष्पत्ति सदैव धन रहेगी।

अतः य ऋण और  $n, s+1$  से बड़ा पहला धन पूर्णांक हो तो  $(1+y)^n$  के विस्तार में नवें पद क पश्चात् सब पदों के चिह्न नवें पद के चिह्न के समान होंगे। विशेष उदाहरण के लिए  $(1-y)^n$  के विस्तार के सव पद, स के ऋण होने पर, धन होते हैं

१२.७ य की परिमेय अर्हा के लिए  $(1+y)^n$  के विस्तार में संख्या की दृष्टि से महत्तम पद निकालना।

क्योंकि महत्तम पद की केवल संख्यात्मक अर्हा निकालनी है, इसलिए य को सर्वत्र धन माना जायगा।

य की सब अर्हाओं के लिए, ऐसी दशा का, जिस में स धन पूर्णांक है, पर्यालोचन किया जा चुका है।

यह देखा जा चुका है कि, यदि स ऋण अथवा भिन्नीय हो तो द्विपद विस्तार य की  $-1 < y < 1$  अर्हाओं के लिए संगत है। अब उन दशाओं पर विचार किया जायगा जिनमें य संख्या की दृष्टि से १ से छोटा है

दशा १ — मान लो स धन भिन्न है।

यह ज्ञात है कि

$$p_{n+1} = \frac{s-n+1}{n} y \times p_n$$

$$= \left[ \frac{s+1}{n} - 1 \right] y \times p_n$$

गुणन करने वाला खण्ड  $\left[ \frac{s+1}{n} - 1 \right]y$ , जब तक  $n < s+1$  है, घन होगा। इस प्रक्रम (stage) से आगे यह कण हो जाता है किन्तु संख्या कि दृष्टि से सदैव 1 से छोटा रहता है।

अथ  $\left[ \frac{s+1}{n} - 1 \right]y \geq 1$  तदनुसार  $p_{n+1} \geq p_n$

अथवा  $n \geq \frac{s+1}{1+y}$  य तदनुसार  $p_{n+1} \geq p_n$

(क) यदि  $\frac{s+1}{1+y}$  य पूर्णांक  $n$  के सम हो तो  $n$

की  $(t-1)$  तक सब अर्थात्  $\frac{s+1}{1+y}$  य से छोटी है।

$n$  की इन अर्थात्ओं के लिए प्रत्येक पद पिछले पद से बड़ा है।

अतः  $p_t > p_{t-1} > p_{t-2} \dots > p_1 > p_0$

$\therefore$  इन पदों में  $p_t$  महत्तम पद है।

जब  $n = t$  तब  $p_t = p_{t+1}$

$n$  की  $(t+1)$  के आगे की अर्थात्  $\frac{s+1}{1+y}$  य से बड़ी है। अतः  $n$  की इन अर्थात्ओं के लिए

$p_{t+1} > p_{t+2} > p_{t+3} \dots$

$\therefore$  इन पदों में  $p_{t+1}$  महत्तम पद है।

अतः यदि  $\frac{s+1}{1+y}$  पूर्णांक त के सम हो तो  $p_t$  और  $p_{t+1}$  दो महत्तम पद प्राप्त होते हैं और वे एक दूसरे के समान होते हैं ।

(ख) यदि  $\frac{s+1}{1+y}$  पूर्णांक न हो तो उसके अनुकूल भाग का  $y$  से अभिधान करो ।

$n$  की  $y$  तक सब अर्धार्थ  $\frac{s+1}{1+y}$  से छोटी हैं । इसलिए  $n$  की इन अर्धार्थों के लिए  $p_{y+1} > p_y > p_{y-1} > \dots > p_2 > p_1 > p$ ,  $n$  की  $y$  से आगे की अर्धार्थों के लिए

$n$ ,  $\frac{s+1}{1+y}$  से बड़ा है ।

अतः  $n$  की इन अर्धार्थों के लिए

$$p_{y+1} > p_{y+2} > p_{y+3} > \dots$$

अतः इस दशा में स्पष्टतः  $p_{y+1}$  महत्तम पद है ।

दशा २—मानलो  $s$  की अर्धार्थ श्रृंखला है और  $-m$  के सम है । यहां  $m$  धन होगा ।

अब  $\frac{s-n+1}{n}$  की संख्यात्मक अर्धार्थ  $\frac{m+n-1}{n}$  य अर्धार्थ

$$\left[ \frac{m-1}{n} + 1 \right] \text{ य होती है}$$

$$\text{अब } \left[ \frac{m-1}{n} + 1 \right] y \geq 1$$

अथवा  $n \begin{cases} \leq \frac{m-1}{1-y} \\ > \frac{m-1}{1-y} \end{cases}$  य तदनुसार  $p_{n+1} \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} p_n$

(क) यदि  $\left(\frac{m-1}{1-y}\right)y$ , त के सम धन पूर्णांक हो तो पिछली

दशा की रीति से यह बताया जा सकता है कि  $(t+1)^{\text{वा}}$  और  $t^{\text{वा}}$  पद महत्तम पद हैं और वे एक दूसरे के समान हैं।

यदि  $\frac{m-1}{1-y}y$  धन हो किन्तु पूर्णांक न हो और उसका अनुकूल भाग  $x$  हो तो  $(x+1)^{\text{वा}}$  पद महत्तम है।

(ख) यदि  $\frac{m-1}{1-y}y$  ऋण हो तो  $m, 1$  से छोटा होगा।

यह देखा जा सकता है कि गुणन करने वाला खण्ड सदैव 1 से छोटा है। अतः प्रत्येक पद पिछले पद से छोटा होगा। इसलिए पहला पद सबसे बड़ा होगा।

१२.७१ उदाहरण— यदि  $y = \frac{1}{2}$  तथा  $s = 14$  हो

तो  $(1+y)^{-s}$  के विस्तार में महत्तम पद निकालो।

यह ज्ञात है कि

$$p_{n+1} = \frac{s+n-1}{n} y \times p_n \quad [\text{संख्या की दृष्टि से}]$$

$$= \frac{14+n}{n} \times \frac{1}{2} p_n$$

$$\therefore \frac{14+n}{n} \times \frac{1}{2} \geq 1$$



$$\text{अथवा } 18 + n \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 3n$$

$$\text{अथवा } n \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 9 \text{ के अनुसार } p_{n+1} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} p_n \text{ होगा।}$$

$n < 9$  के लिए अर्थात्  $n = 1, 2, 3, \dots, 8$  के लिए

$$p_0 > p_1 < p_2 \dots > p_3 > p_4$$

$$n = 9 \text{ के लिए } p_0 = p_9$$

$n > 9$  के लिए

$$p_0 > p_1 > p_2 \dots \dots \dots$$

अतः स्पष्टतः ७वाँ और ८वाँ पद दोनों सत्य से बड़े हैं और वे एक दूसरे के समान हैं।

१२.८ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण १— यदि  $y$  इतना छोटा हो कि उसके घर्ग और उच्चतर घात उपेक्ष्य हों तो

$$\frac{{}^n\sqrt{1 - \frac{2}{3}y} + (1 - \frac{2}{3}y)^{-\frac{n}{3}}}{{}^n\sqrt{1 + \frac{2}{3}y} + {}^n\sqrt{1 - \frac{2}{3}y}} \text{ की अभी निकालो।}$$

क्योंकि  $y^2$  और  $y$  के उच्चतर घात उपेक्ष्य हैं इसलिए  $y$  के प्रथम घात के पदों को रखना पर्याप्त होगा।

पदसंहति

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left(1 - \frac{3}{9}y\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \frac{3}{9}y\right)^{-\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{1}{2}y\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 - \frac{1}{2}y\right)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{\left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{3}{9}y + \dots\right) + \left[1 + (-1) \left(-\frac{3}{9}y\right) + \dots\right]}{\left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y + \dots\right) + \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}y + \dots\right)} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{9}y + 1 + 3y}{1 + \frac{1}{2}y + 1 - \frac{1}{2}y} \\
 &= \frac{2 + \frac{20}{9}y}{2 - \frac{1}{18}y} \\
 &= \frac{\left(1 + \frac{10}{9}y\right)}{1 - \frac{1}{18}y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{10}{9}y\right) \left(1 - \frac{5}{84}y\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{10}{9}y\right) \left(1 + \frac{5}{84}y\right) \\
&= 1 + \frac{10}{9}y + \frac{5}{84}y \\
&= 1 + \frac{415}{336}y
\end{aligned}$$

उदाहरण २—  $\frac{1}{\sqrt{99}}$  की आठ दशमिक स्थानों तक शुद्ध  
अर्ही निकालो।

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{99}} &= (99)^{-\frac{1}{2}} \\
&= (10^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{10} \left[1 - \frac{1}{10^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{10} \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(+\frac{1}{10^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{1 \times 2} \left(+\frac{1}{10^2}\right)^2 \\
& + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{1 \times 2 \times 3} \left(-\frac{1}{10^3}\right)^3 + \dots ] \\
& = \left[ 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10^1} + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 10^4} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1 \times 3 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 2^3} \times \frac{1}{10^4} + \dots \right] \\
& = \frac{1}{10} + \frac{1}{2 \times 10^2} + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 10^4} \\
& \quad + \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \times 10^6} + \dots
\end{aligned}$$

अत्येक पद की गणना करने पर

$$\text{पहला पद} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$\text{दूसरा पद} = \frac{1}{2 \times 10^2} = 0.005$$

$$\text{तीसरा पद} = \frac{1 \times 3}{2^2 \times 10^4} = 0.0000375$$

$$\text{चौथा पद} = \frac{1 \times 5}{2^3 \times 10^6} = 0.0000003125$$

इन पदों के योग से

$$= .1 + .0004 + .0000037 + .00000003124 \\ = .1004037$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} = .70710678$$

उदाहरण ३—  $(1+y+y^2)^{-1}$  के विस्तार में  $y^{10}$  का गुणक निकालो। [नागपुर १९३१]

$$\begin{aligned} (1+y+y^2)^{-1} &= \frac{1}{1+y+y^2} \\ &= \frac{1-y}{(1-y)(1+y+y^2)} \\ &= \frac{1-y}{1-y^3} \\ &= (1-y)(1-y^3)^{-1} \\ &= (1-y)(1+y^3+y^6+y^9+y^{12}+\dots\infty) \\ &\therefore y^{10} \text{ का गुणक स्पष्टतया } -1 \text{ है।} \end{aligned}$$

उदाहरण ४— द्विपद प्रमेय से सिद्ध करो कि

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} + \dots \infty = \sqrt{2}$$

$$\left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} + \dots \infty \right] \text{ इस ध्रुवी-}$$

पर विचार करो। इसे इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$1 + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1 \times 3}{1 \times 2} \times \frac{1}{2^2} + \frac{1 \times 3 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 2^3} + \dots \infty$$

$$\text{अथवा } 1 + \frac{(-\frac{1}{2})}{1} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{(-\frac{1}{2}) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{1 \times 2} + \dots \infty$$

$$+ \frac{(-\frac{1}{2}) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \left(-\frac{1}{2} - 2\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^3}{1 \times 2 \times 3} + \dots \infty$$

किन्तु यह  $(1 - \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$  का विस्तार है।

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \times 3}{2 \times 2} + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2} + \dots \infty$$

$$= (1 - \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

प्रश्नावलि १८

(१) निम्नलिखित विस्तारों में  $(n+1)$ वां पद निकालो—

(च)  $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$       (छ)  $(1-y)^{-\frac{1}{2}}$

$$(ज) (1+2y)^{\frac{1}{2}} \quad (झ) (1+y^2)^{-1}$$

$$(ट) (3-y)^{-2} \quad (ठ) x \frac{1}{\sqrt{x-y}}$$

$$(ड) \frac{1}{\sqrt{(1-2y)^2}} \quad (ढ) \frac{1}{\sqrt{1-3y}}$$

(२) इन विस्तारों में देशित गुणक निकालो—

$$(घ) (1-4y)^{-\frac{3}{2}} \text{ में } y^0 \text{ का} \quad [\text{कलकत्ता १९१०}]$$

$$(छ) (x^2+3xy^2)^{-4} \text{ में } y^1 \text{ और } y^2 \text{ का} \quad [\text{कलकत्ता १८७८}]$$

$$(ज) \left( \frac{y^{\frac{3}{2}}}{5} - \frac{2}{y^{\frac{1}{2}}} \right)^{-12} \text{ में } y^0 \text{ का}$$

(३)  $(1-8y)^{\frac{1}{2}}$  के विस्तार में प्रथम चार पद निकालो।  
[कलकत्ता १९२३]

(४)  $(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}$  का  $y$  के आरोही घातों में  $y^4$  तक विस्तार करो और सामान्य पद निकालो।

(५)  $(x^2+y)^{\frac{1}{2}}$  का ५ पदों तक विस्तार करो।

(६)  $(1-3y)^{\frac{3}{2}}$  के विस्तार में  $y^0$  का गुणक निकालो।

(७)  $\frac{(1+y)^2}{(1-y)^3}$  के विस्तार में  $y^0$  का गुणक निकालो।

(८) निम्न लिखित विस्तारों में महत्तम पद निकालो—

(क)  $(1+y)^{\frac{1}{2}}$  में  $y=\frac{1}{3}$  के लिए

(ख)  $(1+y)^{-1}$  में  $y=\frac{1}{2}$  के लिए

(ग)  $(1-y)^{-\frac{1}{2}}$  में  $y=\frac{1}{2}$  के लिए

(९) इन राशियों की अर्थापे निकालो—

(क)  $(8.00)^{\frac{1}{2}}$  की ६ दशमिक स्थानों तक।

(ख)  $(1.00)^{\frac{1}{2}}$  की ४ दशमिक स्थानों तक।

(ग)  $(1.00)^{-1}$  की ६ दशमिक स्थानों तक।

(घ)  $(1.00)^{-\frac{1}{2}}$  की ४ दशमिक स्थानों तक।

(१०) नीचे लिखे विस्तारों में  $y$  के यथा निर्दिष्ट घातों के गुणक निकालो—

(क)  $\frac{1+y}{(1-y)^2}$  के विस्तार में  $y^4$  का।

[कलकत्ता १९३७]

(ख)  $\frac{1-2y}{(1+2y-y^2)}$  के विस्तार में  $y^2$  का।

[कलकत्ता १९०९]

(ग)  $\frac{1+y}{1-y}$  के विस्तार में  $y^4$  का। [कलकत्ता १९१९]

(घ)  $(1-2y+2y^2)^{-1}$  के विस्तार में  $y^4$  का।

[बम्बई १८९३]



(छ)  $\frac{(1+3y)^3}{(1+2y)^2}$  के विस्तार में  $y^5$  का [बम्बई १८९१]

(११) दिखाओ कि यदि  $-1 < y < 1$  हो तो

$$(1 + y + y^2 + y^3 + \dots)^2 = 1 + 2y + 3y^2 + \dots + (n+1)y^n + \dots$$

(१२) यदि  $-1 < y < 1$  हो तो—

$(1 + 2y + 3y^2 + y^3 + \dots)^4$  के विस्तार में  $y^4$  का गुणक निकालो।

यदि  $y$  इतना छोटा हो कि उसके घर्ग और उच्चतर घात उरेक्ष्य हैं तो सिद्ध करो कि

$$(१३) \frac{(2+3y)^{\frac{3}{2}}}{(2+3y)\sqrt{4-4y}} = 1 - \frac{4y}{2} \text{ लगभग}$$

[नागपुर १९३३]

$$(१४) \frac{(1+3y)^{-2} + (1-2y)^{-1}}{(1+3y)^{-2} + (1+y)^{-1}} = 1 + 2y \text{ लगभग}$$

[नागपुर १९३८]

$$(१५) \frac{(1-3y)^{\frac{1}{2}} + (1-y)^{\frac{3}{2}}}{(4+y)^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{41y}{24} \text{ लगभग}$$

[नागपुर १९५६]

$$(१६) \quad \frac{(१+२य)^२(३+४य)}{(१-य)^३} = १ + \frac{७३}{५}य \text{ लगभग}$$

द्विपद विस्तार से नीचे लिखी अनन्त श्रेणियों का योग निकालो —

$$(१७) \quad १ + \frac{२}{१} \times \frac{१}{३} + \frac{२ \times ५}{१ \times २} \times \frac{१}{३^२} \\ + \frac{२ \times ५ \times ८}{१ \times २ \times ३} \times \frac{१}{३^३} + .. ...$$

$$(१८) \quad १ + \frac{१}{३} + \frac{१}{३} \times \frac{२}{६} + \frac{१}{३} \times \frac{३}{६} \times \frac{५}{९} + ...$$

[इलाहाबाद १९२२]

$$(१९) \quad १ + \frac{३}{४} + \frac{३ \times ५}{४ \times ८} + \frac{३ \times ५ \times ७}{४ \times ८ \times १२} + .....$$

$$(२०) \quad \frac{३}{१} + \frac{३ \times ५}{१ \times २} \times \frac{१}{३} + \frac{३ \times ५ \times ७}{१ \times २ \times ३} \times \frac{१}{३^२} + .....$$

[मद्रास १९४०]

(२१) यदि  $\frac{१}{८}$  इतना छोटा है कि उसके धन और उच्चतर घात उपेक्ष्य हैं तो दिखाओ कि

$\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-y}\right)^2$  लगभग  $2 + \frac{3x^2}{4y^2}$  के सम है।

[नागपुर १९२७]

(२२) सिद्ध करो कि—

$$\frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1 \times 3}{1 \times 2} \times \frac{1}{10^4} + \frac{1 \times 3 \times 5}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{10^6} + \dots \infty \right] = \sqrt{2}$$

(२३) यदि  $x = y + y^2 + y^3 + \dots \infty$  तो  $y$  को  $x$  के आरोही घातों की श्रेणी के पदों में व्यक्त करो।

(२४) यदि  $x = 2y + 3y^2 + 4y^3 + \dots$  तो  $y$  को  $x$  के आरोही घातों की श्रेणी के पदों में व्यक्त करो।

(२५) सिद्ध करो कि—

$$\left[ \frac{1+y}{1-y} \right]^x = 1 + x \frac{2y}{1+y} + \frac{x(x+1)}{1 \times 2} \times \frac{4y^2}{(1+y)^2} + \dots$$

## तेरहवां अध्याय

### छेदाएं

(logarithms)

१३.१ छेदा की परिभाषा—

यदि क, य, तथा र तीन राशियां ऐसी हों कि  
 $k^y = r$  ..... (१)

तो घात य, आधार क पर, र की छेदा कहलाता है। यह  
 इस प्रकार लिखा जाता है—

$y = \text{छेद}_k r$  ..... (२)

क (आधार), र (राशि) तथा य (घात अथवा छेदा)  
 इन तीन राशियों के एक ही सम्यन्ध को व्यक्त करने  
 के समीकार (१) और (२) ये दो प्रकार हैं।

सम्यन्ध (१) घातीय रूप में है और (२) उसी  
 सम्यन्ध को छेदा के रूप में व्यक्त करता है।

परिभाषा— दत्त आधार पर किसी राशि की छेदा  
 उस घात के सम है, जिस तक आधार का उन्नयन करने  
 से वही राशि प्राप्त होती है।

और यदि दत्त आधार पर, र की छेदा य हो तो, र,

उसी आधार पर  $y$  की प्रतिच्छेदा (anti logarithm) कहलाता है ।

१३.११ उदाहरण १—

क्योंकि  $2^3 = 8$

इसलिए  $\log_2 8 = 3$

उदाहरण २— क्योंकि  $3^{-4} = \frac{1}{81}$

इसलिए  $\log_3 \left( \frac{1}{81} \right) = -4$

उदाहरण ३— क्योंकि  $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

इसलिए  $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

उदाहरण ४— क्योंकि  $k^1 = k$

इसलिये  $\log_k k = 1$

[किसी भी आधार  $k$  के लिए

उदाहरण ५— क्योंकि  $k^0 = 1$

इसलिए  $\log_k 1 = 0$

[किसी भी आधार  $k$  के लिये

उपर्युक्त उदाहरणों से इन फलों का अनुमान किया जाया है ।

(१) किसी भी आधार पर १ की छेदा शून्य होती है

(२) किसी भी राशि की छेदा उसी राशि के आधार पर, १ होती है।

(३) छेदा घन, ऋण पूर्णांक अथवा भिन्न हो सकती है।

१३.२ छेदाओं के लिए निम्न प्रमेयों का उपपादन किया जायगा।

(१) दत्त आधार पर दो राशियों के गुणनफल की छेदा उसी आधार पर उन्हीं दो राशियों की छेदाओं के योग के सम होती है अर्थात्

$$\text{छेक}(m \times n) = \text{छेक}m + \text{छेक}n$$

$$\text{मान लो } y = \text{छेक}m \text{ अतः } k^y = m$$

$$\text{तथा } r = \text{छेक}n \text{ अतः } k^r = n$$

$$\text{अब } m \times n = k^y k^r = k^{y+r}$$

$$\text{अतः } \text{छेक}(m \times n) = y + r \quad [\text{परिभाषानुसार}]$$

$$= \text{छेक}m + \text{छेक}n$$

(२) दत्त आधार पर लब्धि की छेदा उसी आधार पर के भाज्य की छेदा से विद्युत उसी आधार पर के भाजक की छेदा के सम होती है।

$$\text{अर्थात् } \text{छेक}\left(\frac{m}{n}\right) = \text{छेक}m - \text{छेक}n$$

उपर्युक्त कल्पना के अनुसार

$$\frac{m}{n} = \frac{k^y}{k^r} = k^{y-r}$$

$$\text{अतः } \text{छेक}\left(\frac{m}{n}\right) = y - r \quad [\text{परिभाषानुसार}]$$

$$= \text{छेक}m - \text{छेक}n$$

उदाहरण १ —

$$\begin{aligned} \text{छेक } (33 \times 64) &= \text{छेक}33 + \text{छेक}64 \\ &= \text{छेक}(11 \times 3) + \text{छेक}(13 \times 4) \\ &= \text{छेक}11 + \text{छेक}3 + \text{छेक}13 + \text{छेक}4 \end{aligned}$$

उदाहरण २ —

$$\begin{aligned} &\frac{\text{छेक } (17 \times 237 \times 47)}{(23 \times 47)} \\ &= \text{छेक}(17 \times 237 \times 47) - \text{छेक}(23 \times 47) \\ &= \text{छेक}17 + \text{छेक}237 + \text{छेक}47 - \text{छेक}23 - \text{छेक}47 \\ &= \text{छेक}17 + \text{छेक}(3 \times 79) + \text{छेक}47 \\ &\quad - \text{छेक}23 - \text{छेक}(3 \times 16) \\ &= \text{छेक}17 + \text{छेक}3 + \text{छेक}79 + \text{छेक}47 - \text{छेक}23 \\ &\quad - \text{छेक}3 - \text{छेक}16 \\ &= \text{छेक}17 + \text{छेक}79 + \text{छेक}47 - \text{छेक}23 - \text{छेक}16 \end{aligned}$$

(३) दत्त आधार पर किसी घातयुक्त राशि की छेदा, उस राशि के घात और दत्त आधार पर उसी राशि की छेदा के गुणनफल के सम होती है।

अर्थात्  $\text{छेक}(m^n) = n \text{छेक}m$  [न की सव अर्द्धियों के लिए मान लो  $y = \text{छेक}m$  अतः  $ky = m$ ]

अथ  $म^n = (क^n)n$   
 $= क^n n$  [न की सब अर्हाओं के लिए  
 अतः छेकम<sup>n</sup> = नय [परिभाषानुसार  
 $= न \times छेकम$

प्रत्यक्ष रीति से  $१०\sqrt{९९९}$  की अर्हा निकालना कठिन है किन्तु छेदा की सहायता से ९९९ का  $१७^{वा}$  मूल निकालना सरल है।

$$\text{अथ छे, } १०\sqrt{९९९} = \frac{१}{१७} \text{ छे, } ९९९$$

दक्षिण पक्ष की अर्हा कैले निकाली जा सकती है यह आगे बताया जायगा। दक्षिण पक्ष की अर्हा क्षात होने पर प्रतिच्छेदा नारणी की सहायता से अपेक्षित मूल निकाला जा सकता है।

१३.२१ उपर्युक्त प्रमेयों से यह क्षात होता है कि गुणन और भाजन क्रियाओं का क्रमशः योग और वियोग क्रियाओं से और क<sup>n</sup> समान राशियों की अर्हा निकालने की रीति का गुणन क्रिया से प्रतिस्थापन हो सकता है।

गुणन, भाजन, द्गमूः निस्तारण...इत्यादि कठिन विधाओं को सरलता से करने के लिए छेदा की रीतियों का प्रयोग किया जाता है। इस प्रयोजन से, प्रमाण आधार पर, सब संख्याओं की छेदाओं का कुछ दशमिक स्थानों तक परिगणन किया गया है। तात्त्विक विवेचन में राशि घा जिसका अर्थ अगल अध्याय में स्पष्ट किया जायगा, आधार



मान ली जाती है, किन्तु व्यवहार में आधार १० लिया जाता है। प्रथमतः छेदाओं का परिगणन या को आधार मानकर करते हैं, तत्पश्चात् आधार या का 'स' में [किसी भी आधार में] परिवर्तन किया जाता है। आधार या पर परिगणित छेदाएँ प्राकृतिक छेदाएँ (natural logarithms) कहलाती हैं क्योंकि बीजीय अनुसंधान में इन छेदाओं का स्वाभाविक रूप से प्रथमतः विचार किया जाता है।

१३.३ यह आवश्यक नहीं है कि किसी भी राशि की छेदा धन और पूर्णांक हो। यह इन उदाहरणों से स्पष्ट हो जायगा।

अब  $10^y = n$  में  $n$  कोई भी राशि है और आधार १० पर  $y$  उसकी छेदा है।

मान लो  $n = 513$

अब  $513 < 10^3$  किन्तु  $> 10^2$

अथवा  $10^2 < 513 < 10^3$

अतः  $10^{2+\text{लघ्वंश भिन्न}} = 513$

$\therefore y = \text{छे } 513 = 2 + \text{लघ्वंश भिन्न}$

अथवा छे 513 २ और ३ के बीच का धन भिन्न है।

पुनः  $n = .08$  पर विचार करो।

$.08 > 10^{-2}$  और  $< 10^{-1}$

अथवा  $10^{-2} < .08 < 10^{-1}$

अथवा  $10^{-2+\text{लघ्वंश भिन्न}} = .08$

$\therefore \text{छे } .08 = -2 + \text{लघ्वंश भिन्न}$

अथवा छे००४ ऋण भिन्न है।

१३.३१ लक्षण और दशमिकांश [characteristic and mantissa]

परिभाषा:— यदि किसी राशि की छेदा अंशतः पूर्णांक और अंशतः भिन्नांक हो, तो पूर्णांक भाग को छेदा का लक्षण (characteristic) और भिन्नीय भाग को छेदा का दशमिकांश (mantissa) कहते हैं।

१३.४ आचार १० पर किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण केवल अघलोकन से प्राप्त किया जा सकता है।

(१) १ से बड़ी संख्याओं की छेदाओं के लक्षणों का निश्चयन।

$$\begin{aligned} \text{अथ } 10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 100 \\ 10^3 &= 1000 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

इस से यह निष्कर्ष निकलता है कि, पूर्णांक भाग में दो अंकोंवाली संख्याएं  $10^1$  और  $10^2$  के बीच रहती हैं। पूर्णांक भाग में तीन अंकोंवाली संख्याएं  $10^2$  और  $10^3$  के बीच रहती हैं.....इत्यादि।

अतः पूर्णांक भाग में स अंकोंवाली संख्याएं  $10^{s-1}$  और  $10^s$  के बीच रहती हैं।

यदि न ऐसी संख्या हो जिसके पूर्णांक भाग में स अंक हों तो

$$n = 10^{(s-1)+\text{लघ्वंश भिन्न}}$$

$$\therefore \text{छे न} = (s-1) + \text{लघ्वंश भिन्न}$$

अतः न की छेदा का लक्षण  $(s-1)$  है। अर्थात् १ से घटी संख्या की छेदा का लक्षण धन, और उस संख्या के पूर्णांक भाग के अंकों की संख्या से १ कम होता है।

(२) १ से छोटी दशमिक भिन्न की छेदा का लक्षण ऋण, और दशमिक चिह्न के पश्चात् तत्काल आने वाले शून्यों की संख्या से १ अधिक होता है।

मान लो घ दशमिक भिन्न है, जिसमें दशमिक चिह्न के पश्चात् 'द' शून्य तत्काल आते हैं।

$$\text{अब } 10^0 = 1$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = .1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = .01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = .001$$

.....

.....

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि दशमिक भिन्न जिसमें

दशमिक चिह्न के पश्चात् कोई शून्य तत्काल नहीं आते  $10^{-1}$  और  $10^0$  के बीच रहता है; दशमिक भिन्न जिसमें दशमिक चिह्न के पश्चात् एक शून्य तत्काल आता हो  $10^{-2}$  और  $10^{-1}$  के बीच रहता है; दशमिक भिन्न जिसमें दशमिक चिह्न के पश्चात् दो शून्य तत्काल आते हों  $10^{-3}$  और  $10^{-2}$  के बीच रहता है..... इत्यादि। अतः दशमिक भिन्न जिसमें दशमिक चिह्न के पश्चात्  $d$  शून्य तत्काल आते हों  $10^{-(d+1)}$  और  $10^{-d}$  के बीच रहता है।

$$\text{अर्थात् } 10^{-d} > \text{घ} > 10^{-(d+1)}$$

$$\therefore \text{घ} = 10^{-(d+1)} + \text{लव्धश भिन्न}$$

$$\therefore \text{छे (घ)} = -(d+1) + \text{लव्धश भिन्न}$$

अतः दशमिक चिह्न के पश्चात् तत्काल  $d$  शून्यशाले दशमिक भिन्न घ की छेदा का लक्षण  $-(d+1)$  होता है।

१३.५ सार्थक (significant) अंकों के एक ही अनुक्रम वाली सब राशियों की छेदाओं का दशमिकांश एक ही होता है।

मान लो  $m$  तथा  $n$  ऐसी दो संख्याएँ हैं जिनमें सार्थक अंकों का अनुक्रम एक ही है अर्थात् दोनों संख्याओं में केवल दशमिक चिह्न क स्थान में ही भेद है। अब किसी भी संख्या का घात युक्त  $10$  से गुणन अथवा भाजन करने पर अंकों के अनुक्रम में परिवर्तन हुए बिना, केवल दशमिक चिह्न के स्थान में परिवर्तन होता है। इसलिए किसी उपयुक्त घात युक्त  $10$  से  $n$  का गुणन अथवा भाजन करने पर  $m$  प्राप्त होगा।

अतः  $m = n \times 10^t$

[जहाँ  $t$  धन अथवा ऋण पूर्णांक है।

अब  $\text{छे.} m = \text{छे.} (n \times 10^t)$

[दोनों पक्षों की छेदापं लेने पर

$$= \text{छे.} n + \text{छे.} 10^t$$

$$= \text{छे.} n + t \text{ छे.} 10$$

$$= \text{छे.} n + t$$

अतः  $m$  की छेदा में और  $n$  की छेदा में केवल धन अथवा ऋण पूर्णांक का अन्तर है।

अतः सार्धक अंकोंवाली दो संख्याओं की छेदाओं का दशमिकांश समान होता है।

१३.५१ पिछले अनुच्छेदों में दशमिकांश धन माने गए हैं। सामान्य पद्धति (common system) में, जिसमें आधार १० माना गया है, क्रियाएं इस प्रकार विन्यस्त की जाती हैं कि दशमिकांश सदैव धन रहता है। उदाहरणार्थ छे.००३ पर विचार करो। इसका लक्षण -३ और दशमिकांश ४७७१ है।

अतः छेदा अथवा  $(-३ + ४७७१)$  ऋण है। किन्तु व्यवहार में दशमिकांश धन और केवल लक्षण ऋण रखा जाता है। यह दिखाते के लिए कि केवल लक्षण ही ऋण है, ऋण चिह्न लक्षण के उपर रखा जाता है। अतएव छे.००३ की ३-४७७१ इस प्रकार लिखते हैं। इस में ३ का अर्थ यह है कि ३ ऋण है और ४७७१ धन है। इसमें और -३-४७७१

में भेद करना चाहिए क्योंकि  $-३४७७१$  में पूर्णांश और  
मिश्रांक दोनों ऋण हैं। अतः

$$३४७७१ = -३ + ४७७१$$

$$-३४७७१ = -३ - ४७७१$$

अब यह संभव है कि प्रश्न साधन करते समय छेदा  
ऐसे रूप में प्राप्त हो जिस में लक्षण और दशमिकांश दोनों  
ऋण हों। ठीक ठीक विन्यास से दशमिकांश धन किया जाता  
है। यह इस उदाहरण से स्पष्ट होगा।

छ  $\frac{१}{३}$  की यहाँ निकालो

$$\begin{aligned}\text{छ } \frac{१}{३} &= \text{छ } \frac{१०}{३०} \\ &= \text{छ } १० + \text{छ } ३० \\ &= १ - (१ \cdot ४७७१) \\ &= -४७७१\end{aligned}$$

किन्तु  $\text{छ } \frac{१}{३} = -४७७१$  इस प्रकार लिखने की  
अपेक्षा

$$\begin{aligned}\text{छ } \frac{१}{३} &= -१ + (१ - ४७७१) \\ &= -१ + ५२२९\end{aligned}$$

$= १ \cdot ५२२९$  इस प्रकार लिखा जाता है जिसमें  
दशमिकांश धन है।

१३.६ गत अनुच्छेदों में जो सिद्ध किया गया है उससे यह स्पष्ट होगा कि किसी भी संख्या की छेदा का लक्षण केवल भवलोकन से प्राप्त किया जा सकता है। आधार १० पर सभी संख्याओं के दशमिकांशों का परिगणन किया गया है।

और उन्हें चार और सात स्थानों तक शुद्ध, गणितीय सारणियों के रूप में दिया गया है। किसी भी राशि स की छेदा का दशमिकांश सारणियों से निकालने की रीति यहां स्पष्ट की गई है। इस प्रयोजन से चार अंकों वाली सारणी का प्रयोग किया गया है, जिसका उद्धरण इन पुस्तक के अन्त में किया जायगा।

(क) छे ८८ निकालना।

छेदा-सारणी के प्रथम पृष्ठ में सबसे प्रथम (अंकों के) स्तंभ में संख्या ८८ देखो। अथ ८८ को धारण करने वाली पंक्ति पर ध्यान दो। इस पंक्ति में और शून्य शीर्षक वाले स्तम्भ में रहन वाली संख्या ९४४५, छे ८८ का दशमिकांश है। (सारणी में दशमिक चिह्न नहीं दिया गया है। विद्यार्थियों को इसे संख्या के पहले रखना चाहिए।

क्योंकि संख्या ८८, १० और १०<sup>१</sup> के बीच में है, छे ८८ का लक्षण १ है।

अतः छे ८८ = १.९४४५

(ख) छे ५ निकालना।

छे ५ का दशमिकांश छे ५० के दशमिकांश के समान है। यह पिछली रीति से निकाला जा सकता है। इसका लक्षण शून्य है।

$$\therefore \text{छे } ५ = ०.६९९०$$

(ग) छे ६३.८ निकालना ।

छे ६३.८ और छे ६३.८ का दशमिकांश एक ही है । अतः सारणी के पृष्ठ में अंकों के स्तंभ में संख्या ६३ हूँढो । ६३ को धारण करने वाली पंक्ति में और शीर्षक ८ वाले स्तंभ में रहने वाली संख्या ८०४८, छे ६३.८ का दशमिकांश है ।

छे ६३.८ का लक्षण १ है

$$\text{अतः छे } ६३.८ = १.८०४८$$

(घ) छे ०.०८३४६ निकालना ।

यहां अपेक्षित दशमिकांश छे ८३४६ के दशमिकांश के समान है । अतः सारणी के पृष्ठ में अंकों के स्तंभ में ८३ देखो । तत्पश्चात् ८३ को धारण करने वाली पंक्ति में और शीर्षक ४ वाले स्तंभ में रहने वाली संख्या ९२१२ पर रुको । यह छे ८३४ का दशमिकांश है । पुनः इसी (८३ को धारण करने वाली) पंक्ति में मध्यकान्तर की (mean difference) सारणी में शीर्षक ६ वाले स्तंभ में संख्या ३ (जो यथार्थ में ०.००३ है) प्राप्त होगी । ०.००३ को दशमिकांश ९२१२ में जोड़ो । प्राप्त फल छे ०.०८३४६ का दशमिकांश है और छे ०.०८३४६ का लक्षण - २ है ।

$$\text{अतः छे } ०.०८३४६ = -२ + ९२१५$$

यह सदैव छे  $०.०८३४६ = २.९२१५$  इस प्रकार लिखा जाता है । इसका अर्थ यह है कि केवल लक्षण ज्ञात है बिन्दु दशमिकांश धन है ।



१३.७ प्रतिच्छेदा की परिभाषा इस प्रकार दी गई है कि यदि छेदन = य तो, आधार क पर, न, य की प्रतिच्छेदा कहलाता है।

यह इस प्रकार लिखा जाता है। न = प्रतिच्छेदय। प्रतिच्छेदा की सारणी इसी पुस्तक के अन्त में दी गई है। प्रतिच्छेदा निकालने की रीति इस उदाहरण से ज्ञात होगी।

प्रतिच्छे २-४७८९ निकालना।

प्रथम, लक्षण को छोड़ दो और केवल दशमिकांश ४७८९ का अवलोकन करो। प्रतिच्छेदा की सारणी के पन्ने में सद्य से पहले स्तम्भ में ४७ को देखो। फिर ४७ वाली पंक्ति में और शीर्ष ८ के स्तम्भ की संख्या ३००६ पर रको। पुनः इसी पंक्ति में मध्यकान्तर के स्तम्भों में शीर्ष ९ के नीचे की संख्या ६ (यथार्थ में ०००६) को देखो। अतः प्रतिच्छे ४७८९ के सार्थक अंक (३००६ + ०००६) अर्थात् ३०१२ हैं। लक्षण २ के सम दिया गया है। अतः अपेक्षित संख्या के पूर्णांक भाग में तीन अंक होने चाहिये।

अतः प्रतिच्छे २-४७८९ = ३०१-२

१३.८ दत्त आधार पर छेदायं ज्ञात होने पर, किसी भी आधार पर छेदा का परिगणन।

मान लो आधार क पर छेदायं ज्ञात हैं और संख्या न की छेदा दी गई है। अब आधार ख पर न की छेदा ज्ञात करना है।

मान लो  $र = छेदन$  अतः  $ख^र = न$

अतः  $\text{छेक}(\text{र}^2) = \text{छेकन}$

अर्थात्  $\text{र} \times \text{छेकख} = \text{छेकन}$

$$\therefore \text{र} = \frac{1}{\text{छेकख}} \times \text{छेकन}$$

$$\text{अथवा छेकन} = \frac{\text{छेकन}}{\text{छेकख}}$$

अब न और र दिए गए हैं और छेकन और छेकख सारणी से ज्ञात किए जा सकते हैं। इसलिए छेकन निकाला जा सकती है।

इससे यह ज्ञात होता है कि आधार क पर से आधार ख पर छेदामों का रुपान्तरण करने के लिए उनका केवल  $\frac{1}{\text{छेकख}}$  से गुणन करना पर्याप्त है। यह अचल राशि मापांक कहलाती है।

यदि  $\text{छेकन} = \frac{\text{छेकन}}{\text{छेकख}}$  इस समीकार में न=क रखा जाय तो

$$\text{छेकक} = \frac{\text{छेकक}}{\text{छेकख}}$$

अर्थात्  $\text{छेकक} \times \text{छेकख} = 1$

१३.९ गणितीय परिगणन को सरल करने में छेदामों का उपयोग आगे दिए साधित उदाहरणों से स्पष्ट होगा।  
उदाहरण १— ३८७ का घनमूल निकालो।

$$\text{मान लो य} = \sqrt[3]{387}$$

$$\text{अतः } y^3 = 369$$

दोनो पक्षों की छेदाएँ लेने से

$$3 \text{ छेय} = \text{छे } 369$$

$$= 2.5633$$

$$\text{अतः छेय} = 0.8544$$

$$= 0.8544$$

$$\therefore y = \text{प्रतिच्छेद } 0.8544$$

$$= 0.222$$

[प्रतिच्छेदा निकालने पर

$$\text{अतः } \sqrt[3]{369} = 0.222$$

उदाहरण २—तीन सार्थक अंकों तक

$$\sqrt[4]{\left(\frac{669 \times 739}{2347 \times 117}\right)} \text{ की अर्धा निकालो ।}$$

$$\text{मान लो } y = \sqrt[4]{\left(\frac{669 \times 739}{2347 \times 117}\right)}$$

$$\therefore \text{छेय} = \text{छे } \left(\frac{669 \times 739}{2347 \times 117}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} (\text{छे } 669 + \text{छे } 739 - \text{छे } 2347 - \text{छे } 117)$$

$$= \frac{1}{4} [2.2879 + 2.8666 - 3.3672$$

$$- 2.0662]$$

$$= \frac{8}{3} [3063]$$

$$= 2150$$

$$\therefore \text{य} = \text{प्रतिच्छेद} \cdot 2150$$

$$= 1.681$$

उदाहरण ३— यदि छे २ = ३०१० और छे ७ = ८४५१ तो ९८० की छेदा निकालो ।

$$\text{छे } ९८० = \text{छे } १० \times २ \times ७^२$$

$$= \text{छे } १० + \text{छे } २ + \text{छे } ७^२$$

$$= \text{छे } १० + \text{छे } २ + २\text{छे } ७$$

$$= १ + ३०१० + १.६९०२$$

$$= २.९९१२$$

उदाहरण ४— यदि छे २ = ३०१० और छे ३ = ४७७१ तो ६५० में अंकों की संख्या निकालो ।

मान लो ६५० की छेदा य है

$$\therefore \text{य} = \text{छे } ६५०$$

$$= ५७ \text{ छे } २ \times ३$$

$$= ५७ [\text{छे } २ + \text{छे } ३]$$

$$= ५७ [३०१० + ४७७१]$$

$$= ५७ [७७८१]$$

$$= ४४.३५१७$$

अतः लक्षण ४४ है ।

अतः ६५० में अंकों की संख्या ४५ है

उदाहरण ५— साधन करो ।

$$६^{३-४य} \times ४^{य+५} = ८$$

[कलकत्ता १९३८]

दोनों पक्षों की छदाएं लेने से

$$(३-४य) छे ६ + (य+५) छे ४ = छे ८$$

$$\begin{aligned} \therefore य &= \frac{छे ८ - ५ छे ४ - ३ छे ६}{छे ४ - ४ छे ६} \\ &= \frac{छे २^३ - ५ छे २^२ - ३ छे २ \times ३}{छे २^२ - ४ छे २ \times ३} \\ &= \frac{३ छे २ - १० छे २ - ३ छे २ - ३ छे ३}{२ छे २ - ४ छे २ - ४ छे ३} \\ &= \frac{१० छे २ + ३ छे ३}{२ छे २ + ४ छे ३} \\ &= \frac{१० \times ३०१० + ३ \times ४७७१}{२ \times ३०१० + ४ \times ४७७१} \\ &= \frac{४ \cdot ४४१३}{२ \cdot ४१०४} \\ &= १.७ \text{ के लगभग} \end{aligned}$$

उदाहरण ६— दिखाओ कि

$$७ छे \frac{१६}{१५} + ५ छे \frac{२५}{२४} + ३ छे \frac{८१}{८०} = छे २$$

[कलकत्ता १९३६]

$$\begin{aligned}
\text{वाम पक्ष} &= ७छे१६ - ७छे१५ + ५छे२५ - ५छे२४ \\
&\quad + ३छे८१ - ३छे८० \\
&= ७छे२५ - ७छे३ \times ५ + ५छे५^२ - ५छे२^३ \times ३ \\
&\quad + ३छे३^५ - ३छे१ \times २^४ \\
&= २८छे२ - ७छे३ - ७छे५ + १०छे१ - १५छे२ \\
&\quad - ५छे३ + १२छे३ - ३छे५ - १२छे२ \\
&= छे२
\end{aligned}$$

### प्रश्नावलि १९

- (१) आधार २ पर २५६, १२८, ३१, १२५, ०.०६२५ की छेदापं निकालो।
- (२) आधार ३ पर २१८७, २४३ की छेदापं निकालो।
- (३) आधार ५ पर ६२५, ३१२५, ००१६ की छेदापं निकालो।
- (४) (क) आधार  $२\sqrt{३}$  पर १४४ की  
 (ख) आधार  $\sqrt{७}$  पर ३४३ की  
 (ग) आधार  $२\sqrt{२}$  पर ५१२ की
- (घ) आधार  $\sqrt{५}$  पर  $९\sqrt{५}^३$  की छेदापं निकालो।
- (५) निम्नलिखित छेदापं को छे फ, छे ख और छे ग के पदों में व्यक्त करो।

$$(ब) छे (क^५ \times ख^० ग^{-८})$$

$$(भा) छे (क^३ ख^{-१} ग^१)^३$$

$$(इ) छे (१ \sqrt{क^{-५} ख^{१०} ग^{१०}})$$

$$(ई) छे \left[ \frac{१^३ \sqrt{क^{३३} ख^{११०} ग^{३३}}}{(क^३ ख^{-१} ग^१)^३} \right]$$

(६) दिखामो कि

$$७छे \frac{१०}{९} - २ छे \frac{२५}{२४} + ३ छे \frac{८१}{८०} = छे २$$

[कलकत्ता १९३७]

(७) दिखामो कि

$$छेपा१० = २३छेपा \frac{१०}{९} - छेपा \frac{२५}{२४} + १०छेपा \frac{८१}{८०}$$

(८) नीचे दी हुई संख्याओं की छेदामों के लक्षण निकालो ।

(क) १९४७ (ख) ३५९८७५ (ग) .२ (घ) .००२

(ङ) .०००००७

इन समीकारों का साधन करो—

$$(९) क^{३-५} ख^{५} = क^{५+५} ख^{३५}$$

[कलकत्ता १९३७]

$$(१०) ३य = ५$$

$$(११) २य \times ३य = १००$$

$$(१२) य^२ = २य और र = २य$$

[कलकत्ता १९३५]

$$(१३) ३^{३य} \times ५^{३य-४} = ७य^{-१} \times ११^{३य}$$

[मद्रास १९२८]

(१४)  $\text{छे}(\text{य}^2\text{र}^3) = \text{क}$  और  $\text{छे}\frac{\text{य}}{\text{र}} = \text{ख}$  [कलफत्ता १९१९]

(१५) सिद्ध करो कि

$$\text{य}^{(\text{छेर}-\text{छेल})} \times \text{र}^{(\text{छेल}-\text{छेय})} \times \text{ल}^{(\text{छेय}-\text{छेर})} = १$$

(१६) सिद्ध करो कि

$$\text{छेतक} \times \text{छेगख} \times \text{छेङग} = १$$



## चौदहवां अध्याय

### घातांक और छेदा श्रेणियां

(exponential and logarithmic series)

१४.१  $k^r$  इस प्रतीक का निश्चित अर्थ पहले ही दिया जा चुका है। अब  $k^r$  का विस्तार  $r$  के आरोही घातों में किया जायगा और इससे कुछ ऐसी महत्वपूर्ण बातें प्राप्त की जायंगी जिनका उपयोग किसी भी संख्या छेदा का परिगणन करने में किया जा सकेगा।

१४.२  $k^r$  का  $r$  के आरोही घातों में विस्तार द्विपद प्रमेय के अनुसार यदि  $\frac{1}{s}$  संख्यात्मक दृष्टि से १ से छोटा हो तो

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{sy} &= 1 + sy \times \frac{1}{s} + \frac{sy(sy-1)}{1 \times 2} \frac{1}{s^2} \\ &\quad + \frac{sy(sy-1)(sy-2)}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{1}{s^3} \dots\dots \\ &= 1 + y + \frac{y\left(y-\frac{1}{s}\right)}{1 \times 2} + \frac{y\left(y-\frac{1}{s}\right)\left(y-\frac{2}{s}\right)}{1 \times 2 \times 3} \\ &\quad + \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

उपयुक्त फल में यदि  $y = 1$  रखा जाय तो

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = 1 + 1 + \frac{1(1-1)}{1 \times 2} + \frac{1(1-1)(1-1)}{1 \times 2 \times 3} + \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{किन्तु } \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{sy} = \left[\left(1 + \frac{1}{s}\right)^s\right]^y$$

अतः

$$\begin{aligned} 1 + y + \frac{y\left(y - \frac{1}{s}\right)}{1 \times 2} + \frac{y\left(y - \frac{1}{s}\right)\left(y - \frac{2}{s}\right)}{1 \times 2 \times 3} + \dots \\ = \left[1 + 1 + \frac{1\left(1 - \frac{1}{s}\right)}{1 \times 2} + \frac{1\left(1 - \frac{1}{s}\right)\left(1 - \frac{2}{s}\right)}{1 \times 2 \times 3} + \dots \dots \dots\right]^y \end{aligned}$$

अतएव (१) के दक्षिण पक्ष की ध्रेढी (२) के दक्षिण पक्ष की ध्रेढी का  $y^{\text{वाँ}}$  घात है। स चाहे कितना ही बढ़ा क्यों न हो, यह समता सदैव सत्य रहेगी।

अतः स जैसे जैसे बढ़ता है वैसे वैसे  $\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots \dots \dots$

का हसन होता है और जैसे  $s \rightarrow \infty$   $\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots \dots \dots$  सब शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं। अतः सीमा में

$$1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$$

$$= \left[ 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right]^y \quad (\text{आ})$$

यह सम्यन्ध प्राप्त होता है ।

$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  इस श्रेणी का अभिधान सदैव या से किया जाता है ।

अतः (आ) इस प्रकार लिखा जा सकता है ।

$$y^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$$

अब यदि  $y = n$  र मान लिया जाय तो इस फल को

$y^n = 1 + n + \frac{n^2 r^2}{2} + \frac{n^3 r^3}{3} + \dots$  इस प्रकार लिख सकते हैं ।

अब  $y^n = k$  रखने पर

$n = \text{छेपाक और } y^n = k^r$

$$\therefore k^r = 1 + r \text{छेपाक} + r^2 \frac{[\text{छेपाक}]^2}{2!} + \frac{r^3 [\text{छेपाक}]^3}{3!} + \dots$$

इस श्रेणी को घातांक श्रेणी कहते हैं ।

सपप्रमेय १ —  $\left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$  इस पद संहति की सीमा,

स के अनन्ती की ओर प्रवृत्त होने पर 'घा' होती है।

$$\text{अतः } \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s = \text{घा}$$

उपप्रेम २—  $\left(1 + \frac{y}{s}\right)^s$  इस पदसंहति की अर्थात् स के

अनन्ती की ओर प्रवृत्त होने पर  $\left[1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots\right]$

इस श्रेणी के समान होती है।

अथ, द्विपद प्रमेय के अनुसार

$$\left[1 + \frac{y}{s}\right]^s = 1 + s \times \frac{y}{s} + \frac{s(s-1)}{2} \left(\frac{y}{s}\right)^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3} \left(\frac{y}{s}\right)^3 + \dots$$

$$= 1 + y + \frac{1(1-s)}{2} y^2 + \frac{1(1-\frac{1}{s})(1-\frac{2}{s})}{3} y^3 + \dots$$

• अथ जैसे  $s \rightarrow \infty$ ,  $\frac{1}{s}$ ,  $\frac{2}{s}$ ,  $\frac{3}{s}$ , ..... शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं।

$$\text{अतः } \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{s}\right)^s = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$$

$$\text{अथ } \text{घा}^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots$$

$$\therefore \text{सी } \left(1 + \frac{y}{s}\right)^s = \text{घाय}$$

स → ∞

यह ध्यान में रखना चाहिए कि ऊपर के विस्तारों में  $y$  और  $r$  की अर्धांशों पर कोई प्रतिबंध नहीं लगाया गया है। क्योंकि  $s$  की महती अर्धांशों का विचार किया गया है इसलिए  $\frac{1}{s}$  सदैव 1 से न्यून ही रहेगा।

अतः जब  $l$  की अर्धा संख्यात्मक दृष्टि से 1 से छोटी हो। अर्थात् जब  $-1 < l < 1$ , तब 'त' की सब अर्धांशों के लिये  $(1+l)^t$  इस पदसहति का द्विपद प्रमेय द्वारा श्रेणी के रूप में विस्तार किया जा सकता है। गत अनुच्छेद में प्रयोग किए गए द्विपद विस्तार इस प्रतिबंध का पालन करते हैं।

अतः  $y$  और  $r$  की सब अर्धांशों के लिए—

$$r^s = 1 + r \text{ छेपाक} + \frac{r^2 \times (\text{छेपाक})^2}{|2|} + \frac{r^3 \times (\text{छेपाक})^3}{|3|} + \dots$$

$$\text{तथा } \text{घाय} = 1 + y + \frac{y^2}{|2|} + \frac{y^3}{|3|} + \dots$$

घाय के विस्तार में

(1)  $y$  का  $-y$  में परिवर्तन करने से और (2)  $y = -1$  रखने से निम्न-लिखित फल प्राप्त होते हैं।

$$\text{घा} = 1 - y + \frac{y^2}{|2|} - \frac{y^3}{|3|} + \dots$$

$$घा^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$$

$$१४.३१ \quad १ + १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \dots \text{ यह श्रेणी जिस}$$

का अभिधान घा से किया गया है महत्त्वपूर्ण है क्योंकि छेदाओं का परिगणन प्रथम इसी श्रेणी को आधार मान कर किया गया है। घा आधार वाली छेदाएं प्राकृतिक छेदाएं कहलाती हैं।

१४.४ कुछ साधित प्रश्न—

उदाहरण१—  $\left[ \frac{१ - २य + ३य^२}{क^य} \right]$  इस पदसंहति के विस्तार में  $य^n$  का गुणक निकालो।

$$\frac{१ - २य + ३य^२}{क^य}$$

$$= [१ - २य + ३य^२] क^{-य}$$

$$= [१ - २य + ३य^२] \left[ १ - य छेदाक$$

$$+ \frac{य^२}{२} (छेदाक)^२ - \frac{य^३}{३} (छेदाक)^३$$

$$+ \dots + \frac{(-)^{नयन}}{न} (छेदाक)^न + \dots ]$$

∴ अपेक्षित गुणक

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-1)^n (\text{छेपाक})^n}{n} - \frac{2(-1)^{n-1} (\text{छेपाक})^{n-1}}{n-1} \\
 &\quad + \frac{3(-1)^{n-2} (\text{छेपाक})^{n-2}}{n-2} \\
 &= \frac{(-1)^n (\text{छेपाक})^{n-2}}{n-1} \left[ \frac{(\text{छेपाक})^2}{n(n-1)} + 2 \frac{\text{छेपाक}}{n-1} + 3 \right]
 \end{aligned}$$

उदाहरण २—  $1 + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{3} + \frac{4^2}{4} + \dots \dots$  इस श्रेणी का

अनन्ती तक योग निकालो।

दत्त श्रेणी का  $s^{\text{वा}}$  पद  $\frac{s^2}{s}$  है।

$$\begin{aligned}
 \text{अतः } P_s &= \frac{s^2}{s} \\
 &= \frac{s}{s-1} \\
 &= \frac{s-1+1}{s-1} \\
 &= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1}
 \end{aligned}$$

अब इस समग्र्य में  $s$  को २ और २ से आगे की अर्थात् दो।

$$\therefore p_1 = \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$$

$$p_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

.....

.....

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = \left[ \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right] \\ + \left[ \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right]$$

$$\text{किन्तु घा} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

$$\therefore p_1 + p_2 + p_3 + \dots = \text{घा} + \text{घा} - 1$$

घाम पक्ष के योग में  $p_1$  छोड़ दिया गया है । अतः उसकी मर्यादा दक्षिण पक्ष में जोड़ने से

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \dots = 1 + \text{घा} + \text{घा} - 1 \\ = 2\text{घा}$$

$$\text{अतः } 1 + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{3} + \dots \text{ इस श्रेणी का अनन्त तक}$$

योग  $2\text{घा}$  के सम है ।



टिप्पणी—

$$p = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-1} \text{ में } s=1 \text{ नहीं रखा जा सकता}$$

क्योंकि इससे  $\frac{1}{-1}$  मिलता है और  $-1$  का अर्थ नहीं

दिया गया है।

१४.५ छेपा(१+य) का य के आरोही घातों में विस्तार करना—

घातांक विस्तार से यह ज्ञात है कि

$$k^x = 1 + x\text{छेपा}k + \frac{x^2(\text{छेपा}k)^2}{2} + \frac{x^3(\text{छेपा}k)^3}{3} + \dots (1)$$

यदि इसमें  $k = 1 + y$  हो तो

$$(1+y)^x = 1 + x\text{छेपा}(1+y) + \frac{x^2[\text{छेपा}(1+y)]^2}{2} + \frac{x^3[\text{छेपा}(1+y)]^3}{3} + \dots (2)$$

यह प्राप्त होता है।

किन्तु  $x$  की सब अर्जाओं के लिए और  $-1 < y < 1$  के लिए द्विपद प्रमेय ने यह विस्तार प्राप्त होता है।

$$(1+y)^2 = 1 + ry + \frac{r(r-1)}{2} y^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3} y^3 + \dots \quad (2)$$

अब (2) और (3) के दाक्षिण पक्ष सर्वांग सम हैं।

$$\begin{aligned} \therefore 1 + ry + \frac{r(r-1)}{2} y^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3} y^3 + \dots \\ = 1 + r \text{ छेका } (1+y) + \frac{r^2 \text{ छेका } (1+y)^2}{2} \\ + \frac{r^3 [\text{छेका } (1+y)]^3}{3} + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

(4) के दाक्षिण पक्ष में  $r$  का गुणक छेका  $(1+y)$  है और वाम पक्ष में

$$\begin{aligned} y + \frac{(-1)y^2}{2} + \frac{(-1)(-2)y^3}{3} \\ + \frac{(-1)(-2)(-3)y^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

अर्थात्  $y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$  यह है।

इन गुणकों के समीकरण से

$$\text{छेदा } (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

[जहाँ  $-1 < y < 1$

यह श्रेणी छेदा श्रेणी कहलाती है।

$$१४.५१ \text{ छेदा } (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

में  $y$  का  $(-y)$  में परिवर्तन करने से

$$\text{छेदा } (1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots$$

मिल जाता है।

$[-1 < y < 1]$

१४.६ किसी संख्या की छेदा का परिगणन—

अनुच्छेद १४.५ और १४.५१ के अनुसार यदि  $-1 < y < 1$

$$\text{हो तो छे } (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \quad (१)$$

$$\text{और छे } (1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots \quad (२)$$

(१) में से (२) को घटाने पर

$$\text{छे } \left( \frac{1+y}{1-y} \right) = 2 \left[ y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots \right] \dots \dots (३)$$

अथ  $\frac{1+y}{1-y} = \frac{2}{y}$  रखो।

$$\therefore y = \frac{x-x}{x+x}$$

$$\therefore \text{छे } \frac{x}{x} = 2 \left[ \frac{x-x}{x+x} + \frac{1}{3} \left( \frac{x-x}{x+x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{x-x}{x+x} \right)^5 + \dots \right]$$

मान लो  $x = x + 1$

$$\therefore \text{छे } \frac{x+1}{x} = 2 \left[ \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2x+1} \right)^5 + \dots \right]$$

अब मान लो  $x = 1, 2, 3, \dots$

$$\therefore \text{छे } 2 = 2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3^5} + \dots \right] \dots (4)$$

$$\text{छे } 3 = 2 \left[ \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5^5} + \dots \right] (5)$$

.....

(4) के दक्षिण पक्ष के पदों का योग करने से छे 2 की अर्धा प्राप्त होती है।

$$\therefore \text{छे } 2 = .693147$$

(4) से छे 2 की अर्धा प्राप्त करने पर इसी विधा से छे 3 - छे 2 = .404864 प्राप्त होता है [ (5) से

$$\therefore \text{छे ३} = \cdot ४०५४६५ + \cdot ६९३१४७ \\ = १.०९८६१२$$

इस प्रकार से घा आधार पर किसी भी राशि की छेदा परिशुद्धता के अपेक्षित अंश तक निकाली जा सकती है।

१४.७ उदाहरण १—

छे  $(१ - ५य + ६य^२)$  का 'य' के आरोही घातों में विस्तार करो, और सामान्य पद निकालो।

$$१ - ५य + ६य^२ = (१ - ३य) (१ - २य)$$

$$\therefore \text{छे } (१ - ५य + ६य^२) = \text{छे}(१ - ३य) + \text{छे}(१ - २य)$$

$$\text{अब छे } (१ - ३य) = - \left[ ३य + \frac{(३य)^२}{२} + \frac{(३य)^३}{३} + \dots \right]$$

$$\text{और छे } (१ - २य) = - \left[ २य + \frac{(२य)^२}{२} + \frac{(२य)^३}{३} + \dots \right]$$

$$\therefore \text{छे } (१ - ५य + ६य^२) = - \left[ ३य + \frac{(३य)^२}{२} + \frac{(३य)^३}{३} + \dots \right] \\ - \left[ २य + \frac{(२य)^२}{२} + \frac{(२य)^३}{३} + \dots \right]$$

$$\text{अब सामान्य पद } प_n = - \frac{(३य)^n}{n} - \frac{(२य)^n}{n} \\ = - \frac{य^n}{n} (३^n + २^n)$$

अब न को १, २, ३.....ये अर्थात् देने पर क्रमशः पहला, दूसरा, तीसरा.....पद प्राप्त होता है।

$$\therefore \text{छे } (1 - 4y + 6y^2) = -\frac{y}{1} (4) - \frac{y^2}{2} (12) \\ - \frac{y^3}{3} (24) \dots\dots\dots$$

उदाहरण २—  $y$  के आरोही घातों में छे  $(1 - y + y^2)$  का विस्तार करो ।

$$\text{अब } 1 - y + y^2 = \frac{(1 - y + y^2)(1 + y)}{1 + y} \\ = \frac{1 + y^3}{1 + y}$$

$$\therefore \text{छे } (1 - y + y^2) = \text{छे } \frac{1 + y^3}{1 + y} \\ = \text{छे } (1 + y^3) - \text{छे } (1 + y) \\ = \left[ y^3 - \frac{y^4}{2} + \frac{y^5}{3} - \frac{y^6}{4} + \dots \right] \\ - \left[ y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \right] \\ = -y + \frac{y^2}{2} + 2\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \dots$$

उदाहरण ३— यदि  $x^2 - tx + y = 0$  के मूल  $x$  और  $y$  हों तो दिखाओ कि

$$\text{छे } (1 + tx + ty^2) = \frac{(x + y)}{1} y - \frac{x^2 + y^2}{2} y^2$$

$$+ \frac{a^3 + a^2}{2} y^2 - \dots$$

पर्योकि अ और आ,  $y^2 - तय + थ = 0$  के मूल हैं।

इसलिए  $अ + आ = त$

$$अ \times आ = थ$$

$$\therefore (1 + तय + थय^2) = 1 + (अ + आ) य$$

$$+ अ \times आ \times य^2$$

$$= (1 + अय) (1 + आय)$$

$$\therefore छे (1 + तय + थय^2)$$

$$= छे \left[ (1 + अय) (1 + आय) \right]$$

$$= छे (1 + अय) + छे (1 + आय)$$

$$= \left[ अय - \frac{अ^2 य^2}{2} + \frac{अ^3 य^3}{3} - \right]$$

$$+ \left[ आय \times य - \frac{आ^2 य^2}{2} + \frac{आ^3 य^3}{3} + \dots \right]$$

$$= (अ + आ) य - \frac{अ^2 + आ^2}{2} य^2$$

$$+ \frac{अ^3 + आ^3}{3} य^3 - \dots$$

१४.८ घा की असंमेयता (incommensurability) का

उपपादन— यह सिद्ध किया जायगा कि घा, न तो पूर्णांक हैं और न भिन्न।

$$(अ) अघ घा = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \dots \infty \dots (1)$$

(१) से यह स्पष्ट है कि घा २ से बड़ा है।

$$\text{पुनः घा} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \dots \dots (2)$$

क्योंकि पहले तीन समान पदों के बाद (१) और (२) के दक्षिण पक्ष में (२) का प्रत्येक पद (१) के संवादी पद से बड़ा है।

$$\therefore \text{घा} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \dots \infty$$

$$< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$< 1 + 2$$

$$\therefore \text{घा} < 3$$

$$\text{अतः } 2 < \text{घा} < 3$$

इसलिए घा पूर्णांक नहीं हैं किन्तु उस की बहाँ २ और ३ के बीच है।

(आ) मान लो घा, भिन्न  $\frac{ठ}{ट}$  के सम है जहाँ ट और ठ घन-पूर्णांक हैं।





∴ पूर्णांक = पूर्णांक + लघ्वंश भिन्न  
किन्तु यह असंगत है।

अतः यह कल्पना कि घा भिन्न  $\frac{1}{2}$  के सम है, भ्रान्त है।  
इसलिए घा भिन्न नहीं है।

केवल पूर्णांक और भिन्न संमेय होते हैं। घा इनमें से  
किसी के भी सम नहीं है इसलिए घा असंमेय है।

### प्रश्नावलि २०

(१)  $y^x$  तक  $\frac{1}{y} [1 - \text{घा}^{-y}]$  का  $y$  के आरोही घातों में  
विस्तार करो। [घनारस १९३०]

(२)  $y^x$  तक  $\text{घा}^{\frac{1}{y}}$  का  $y$  के आरोही घातों में विस्तार  
करो।

(३)  $\frac{1}{2\text{श}} [\text{घा}^{\text{शय}} - \text{घा}^{-\text{शय}}]$  का  $y$  के आरोही घातों में  
विस्तार करो जहाँ  $\text{श} = \sqrt{-1}$

(४) दिखाओ कि  $\frac{k + \text{खय}}{1} + \frac{(k + \text{खय})^2}{2}$

$$+ \frac{(क + खय)^3}{13} + \dots$$

इस अनन्त श्रेणी में  $y^8$  का गुणक  $\frac{ख^8}{स}$  है।

[नागपुर १९३४]

(५)  $\frac{१ - २य + ३य^२}{१ + य}$  के विस्तार में  $y^n$  का गुणक निकालो।

$$(६) १ + \frac{१ + क}{२} + \frac{१ + क + क^२}{३} + \frac{१ + क + क^२ + क^३}{४} +$$

..... अनन्ती तक इस श्रेणी की अर्ध निकालो।

[कलकत्ता १८८८]

$$(७) \text{ दिखाओ कि } घा^{-१} = २ \left[ \frac{१}{३} + \frac{२}{५} + \frac{३}{७} + \dots \infty \right]$$

$$(८) \text{ दिखाओ कि } \frac{घा-१}{घा+१} = \frac{\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{६} + \dots}{\frac{१}{१} + \frac{१}{३} + \frac{१}{५} + \dots}$$

[कलकत्ता १९३४]

$$(९) \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right] \left[ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \right]$$

को घा के पदों में व्यक्त करो। [कलकत्ता १९३८]

(१०) इन श्रेणियों का अनन्ती तक योग निकालो—

$$(अ) 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+2^2}{3} + \dots$$

$$(आ) 1 + \frac{1+2}{2} + \frac{1+2+3}{3} + \frac{1+2+3+4}{4} + \dots$$

$$(इ) \frac{2}{1} + \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \frac{8}{7} + \dots \quad [\text{कलकत्ता १८८७}]$$

$$(ई) 1 + \frac{2^2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{3} + \dots \quad [\text{इलाहाबाद १९२८}]$$

$$(उ) 1 + \frac{3}{1} + \frac{4}{2} + \frac{7}{3} + \frac{9}{4} + \dots$$

$$(ऊ) \frac{2^3}{1} + \frac{3^3}{2} + \frac{4^3}{3} + \dots$$

(११) छे  $(1+3y+2y^2)$  का  $y$  के आरोही घातों में विस्तार करो।

(१२) छे  $[y^2 + (k+1)y + kx] - 2$  छेय का  $y$  के अवरोही घातों में विस्तार करो।

(१३) दिखाओ कि

$$2 \left[ \frac{1}{2s^2-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2s^2-1)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(2s^2-1)^3} + \dots \infty \right] \\ = \frac{s^2}{s^2-1} \quad [\text{मद्रास १९४०}]$$

(१४) दिखाओ कि

$$\frac{1}{x} = 2 \left\{ \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left[ \frac{x-1}{x+1} \right]^3 + \frac{1}{5} \left[ \frac{x-1}{x+1} \right]^5 + \dots \infty \right\} \\ [\text{कलकत्ता १९३२}]$$

(१५) दिखाओ कि

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+1)^2} + \frac{1}{3(s+1)^3} + \dots \\ = \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{3s^3} + \dots [\text{कलकत्ता १९१४}]$$

(१६) इन श्रेणियों का अनन्ती तक योग निकालो—

$$(अ) \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \dots [\text{कलकत्ता १९१३}]$$

$$(आ) \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5}$$

$$(इ) \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6 \times 7} + \dots$$

$$(ई) \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \times 4^2} + \frac{1}{3 \times 4^3} + \dots$$

(१७) यदि  $r = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$  हो तो  $y$  को  $r$  के पदों में व्यक्त करो।

(१८) सिद्ध करो कि  
छेदा११ = २ छेदा ७ - छेदा३

$$+ \left[ \left( \frac{8}{9} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{8}{9} \right)^3 + \frac{1}{3} \left( \frac{8}{9} \right)^4 + \dots \right]$$

[इलाहाबाद १९१८]

(१९) सिद्ध करो कि

$$\text{छे ७} = 1 - \frac{1}{2} = 2 - 8 \left[ \frac{1}{99} + \frac{1}{3(99)^2} + \dots \right]$$

जयकि छेदाएं १० को आधार मान कर ली गई हैं और आधार १० पर घा की छेदा ठ है।

यदि छे २ = ३०१०३ और ठ = ४३४२९४ तो छे ७ की अर्हा ६ दशमिक स्थानों तक निकालो।

## पन्द्रहवां अध्याय

### निश्चायक

(determinants)

$$१५.१ \quad \text{फ, य} + \text{ख, र} = ०$$

$$\text{और} \quad \text{फ, य} + \text{ख, र} = ०$$

इन दो समीकारों से यदि य और र का निरसन (elimination) किया जाय तो  $\text{फ, ख}_१ - \text{क, ख}_१ = ०$  .....(१)  
निरसन फल प्राप्त होगा ।

इसी प्रकार तीन युगपत्-समीकारों से

$$\text{फ, य} + \text{ख, र} + \text{ग, ल} = ०$$

$$\text{फ, य} + \text{ख, र} + \text{ग, ल} = ०$$

$$\text{फ, य} + \text{ख, र} + \text{ग, ल} = ०$$

य, र, और ल का निरसन करने पर

$$\begin{aligned} &\text{क, (ख, ग}_३ - \text{ख, ग}_२) + \text{ख, (ग, क}_३ - \text{ग, क}_२) \\ &\quad + \text{ग, (फ, ख}_३ - \text{फ, ख}_२) = ० \end{aligned} \quad \text{.....(२)}$$

यह निरसन फल प्राप्त होगा ।

(१) और (२) के घाम पक्ष क्रमशः  $\begin{vmatrix} क_१ & ख_१ \\ क_२ & ख_२ \end{vmatrix}$

और  $\begin{vmatrix} क_१ & ख_१ & ग_१ \\ क_२ & ख_२ & ग_२ \\ क_३ & ख_३ & ग_३ \end{vmatrix}$  इन रूपों में लिखे जाते हैं।

उपर्युक्त फलों को इस विंशप रूप में लिखने की पद्धति को निश्चायक (determinants) के रूप में व्यक्त करना कहते हैं।

क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ग<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, ख<sub>२</sub>, ग<sub>२</sub>, ..... ये अक्षर निश्चायक के संघटक (constituents) कहलाते हैं।

$\begin{vmatrix} क_१ & ख_१ & ग_१ \\ क_२ & ख_२ & ग_२ \\ क_३ & ख_३ & ग_३ \end{vmatrix}$  इस निश्चायक में क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ग<sub>१</sub>, ; क<sub>२</sub>, ख<sub>२</sub>, ग<sub>२</sub> ;

..... आदि संघटकों को धारण करनेवाली क्षैतिज रेखाएं (horizontal lines) पंक्तियां (rows) कहलाती हैं और क<sub>१</sub>, क<sub>२</sub>, क<sub>३</sub> ; ख<sub>१</sub>, ख<sub>२</sub>, ख<sub>३</sub>, ..... आदि को धारण करने वाली उदग्र रेखाएं स्तम्भ (column) कहलाती हैं। इस निश्चायक में तीन पंक्तियां और तीन स्तम्भ हैं।

इसी प्रकार  $\begin{vmatrix} क_१ & ख_१ \\ क_२ & ख_२ \end{vmatrix}$  इस निश्चायक में दो पंक्तियां और दो स्तम्भ हैं।

अतः यह स्पष्ट है कि किसी भी निश्चायक में पंक्तियों



की संख्या और स्तम्भों की संख्या समान होती है। यह संख्या निश्चायक का वर्ण (order) नियत करती है।

अतः द्वितीय वर्ण के निश्चायक में दो पंक्तियां और दो स्तम्भ और चार संघटक रहते हैं।

तृतीय वर्ण के निश्चायक में तीन पंक्तियां, तीन स्तम्भ और ९ संघटक रहते हैं। सामान्यतः सर्व वर्ण के निश्चायक में  $n$  पंक्तियां,  $n$  स्तम्भ और  $n^2$  संघटक रहते हैं।

सर्व वर्ण के निश्चायक का प्रमाण रूप (standard form)

क <sub>१</sub>	ख <sub>१</sub>	ग <sub>१</sub>	...	प <sub>१</sub>
क <sub>२</sub>	ख <sub>२</sub>	ग <sub>२</sub>	...	प <sub>२</sub>
क <sub>३</sub>	ख <sub>३</sub>	...	...	प <sub>३</sub>
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
क <sub>n</sub>	ख <sub>n</sub>	ग <sub>n</sub>	...	प <sub>n</sub>

इस प्रकार लिया जायगा।

संघटक क<sub>१</sub> को अग्र संघटक (leading constituent) और क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ग<sub>३</sub>, ..... प<sub>n</sub> इन संघटकों को धारण करने वाला विकर्ण अग्र विकर्ण कहलाता है।

कभी कभी (क<sub>१</sub>, ख<sub>१</sub>, ग<sub>३</sub>, ..... प<sub>n</sub>) सर्व वर्ण के निश्चायक का प्रतिनिधान करने के लिए प्रयुक्त किया जाता है।

१५.२ निश्चायकों का विस्तार— अनुच्छेद १५.१ में

यह कहा गया है कि  $\begin{vmatrix} क_१ & ख_१ \\ क_२ & ख_२ \end{vmatrix}$  का विस्तार

$$(क_१ ख_२ - ख_१ क_२) \dots \dots \dots (१)$$

है और  $\left| \begin{array}{c} क_1 र_1 ग_1 \\ क_2 ख_2 ग_2 \\ क_3 ख_3 ग_3 \end{array} \right|$  का विस्तार यह है—

$$क_1(ख_2 ग_2 - ख_3 ग_3) - ख_1(क_2 ग_2 - क_3 ग_3) \\ + ग_1(क_2 ख_3 - क_3 ख_2) \dots\dots\dots(२)$$

$$\text{अथवा } क_1(ख_2 ग_2 - ग_2 ख_2) - क_2(ख_1 ग_2 - ग_1 ख_1) \\ + क_3(ख_1 ग_2 - ग_1 ख_2) \dots\dots\dots(३)$$

इनसे द्वितीय और तृतीय घर्ण के निश्चायकों के विस्तार के लिए ये नियम दिए जा सकते हैं।

(१) द्वितीय घर्ण के निश्चायक में अग्र संघटक को विकर्णतः सम्मुख संघटक से गुणा करो और उस गुणनफल में प्रथम स्तम्भ के दूसरे संघटक और विकर्णतः सम्मुख संघटक का गुणनफल ऋण चिह्न देकर जोड़ो।

$$(२) क_1(ख_2 ग_2 - ख_3 ग_3) - ख_1(क_2 ग_2 - क_3 ग_3) \\ + ग_1(क_2 ख_3 - क_3 ख_2)$$

$$\text{अथवा } क_1(ख_2 ग_2 - ख_3 ग_3) - क_2(ख_1 ग_2 - ख_3 ग_1) \\ + क_3(ख_1 ग_2 - ख_2 ग_1)$$

यह पदसंहति  $\left| \begin{array}{c} क_1 ख_1 ग_1 \\ क_2 ख_2 ग_2 \\ क_3 ख_3 ग_3 \end{array} \right|$  इस निश्चायक का

विस्तार है।

उपर्युक्त पदसंहतियां इस प्रकार लिखी जा सकती हैं।

$$क_1 \left| \begin{array}{c} ख_2 ग_2 \\ ख_3 ग_3 \end{array} \right| - ख_1 \left| \begin{array}{c} क_2 ग_2 \\ क_3 ग_3 \end{array} \right| + ग_1 \left| \begin{array}{c} क_2 ख_2 \\ क_3 ख_3 \end{array} \right|$$

अथवा

$$क_1 \left| \begin{array}{c} ख_2 ग_2 \\ ख_3 ग_3 \end{array} \right| - क_2 \left| \begin{array}{c} ख_1 ग_1 \\ ख_3 ग_3 \end{array} \right| + क_3 \left| \begin{array}{c} ख_1 ग_1 \\ ख_2 ग_2 \end{array} \right|$$

पहिले प्रकार में निश्चायक का विस्तार प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में है और दूसरे प्रकार में वह प्रथम स्तम्भ के संघटकों के पदों में है।

प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में नीचे दी हुई रीति से विस्तार किया जाता है। यही रीति दूसरे प्रकार के लिए भी समानतः उपयुक्त होगी।

क, का गुणक क, को धारण करनेवाली प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ का अपमार्जन करने पर बचे हुए द्वितीय वर्ण के निश्चायक के सम है। अतः क, का गुणक  $\left| \begin{array}{c} ख_2 ग_1 \\ ख_3 ग_2 \end{array} \right|$  है।

प्रथम पंक्ति के द्वितीय संघटक ख, के गुणक की संख्यात्मक अर्थात् प्रथम पंक्ति और द्वितीय स्तम्भ का अपमार्जन करने पर बचे हुए द्वितीय वर्ण के निश्चायक के सम है।

अतः ख, के गुणक की संख्यात्मक अर्थात्  $\left| \begin{array}{c} क_1 ग_1 \\ क_2 ग_2 \end{array} \right|$  है।

प्रथम पंक्ति के तीसरे संघटक ग, के गुणक की संख्यात्मक अर्थात् प्रथम पंक्ति और तृतीय स्तम्भ का अपमार्जन करने पर बचे हुए द्वितीय वर्ण के निश्चायक के सम है। अतः ग,

के गुणक की संख्यात्मक अर्थात्  $\left| \begin{array}{c} क_1 ख_1 \\ क_2 ख_2 \end{array} \right|$  है।

किसी विशेष गुणक का चिह्न निश्चित करने के लिए यह नियम है। अग्र संघटक से विंशत संघटक की स्थिति पंक्ति पर अथवा स्तम्भ पर अथवा दोनों पर गिनो। उसकी संख्या अयुग्म अथवा युग्म होने के अनुसार घन अथवा ऋण चिह्न लो। विभिन्न पदों का उनके उपयुक्त चिह्नानुसार वीजीय योग करने से दत्त निश्चायक का विस्तार प्राप्त होता है।

उदाहरण—

$$\begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{इस निश्चायक का विस्तार}$$

करो।

दत्त निश्चायक का प्रथम स्तम्भ के संघटकों के पदों में विस्तार करने पर

$$\begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 1 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 1 \end{vmatrix} - 20 \begin{vmatrix} 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8 - 3) - (18 - 20) + 3(8 - 20)$$

$$= 10 + 2 - 24$$

$$= -12$$

१५.३ निश्चायकों के गुण [properties of determinants]— निश्चायकों के सर्व साधारण गुण ये हैं। इनका उपपादन तृतीय घर्ण के निश्चायक को लेकर किया जायगा।

तृतीय वर्ण के निश्चायक का प्रमाण रूप  $\left| \begin{array}{l} \text{क}_1 \text{ ख}_1 \text{ ग}_1 \\ \text{क}_2 \text{ ख}_2 \text{ ग}_2 \\ \text{क}_3 \text{ ख}_3 \text{ ग}_3 \end{array} \right|$  लिया जायगा ।

(१) स्तम्भों का पंक्तियों में और पंक्तियों का स्तम्भों में परिवर्तन करने से निश्चायक की अर्हा अपरिवर्तित रहती है अर्थात्

$$\begin{array}{l} \text{क}_1 \text{ ख}_1 \text{ ग}_1 \\ \text{क}_2 \text{ ख}_2 \text{ ग}_2 \\ \text{क}_3 \text{ ख}_3 \text{ ग}_3 \end{array} = \begin{array}{l} \text{क}_1 \text{ क}_2 \text{ क}_3 \\ \text{ख}_1 \text{ ख}_2 \text{ ख}_3 \\ \text{ग}_1 \text{ ग}_2 \text{ ग}_3 \end{array}$$

दक्षिण पक्ष के निश्चायक का विस्तार प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में करने पर

$$\text{क}_1 (\text{ख}_2 \text{ ग}_3 - \text{ग}_2 \text{ ख}_3) - \text{क}_2 (\text{ख}_1 \text{ ग}_3 - \text{ग}_1 \text{ ख}_3) + \text{क}_3 (\text{ख}_1 \text{ ग}_2 - \text{ग}_1 \text{ ख}_2)$$

प्राप्त होता है । पदों का पुनर्विन्यास करने पर

$$\text{क}_1 (\text{ख}_2 \text{ ग}_3 - \text{ख}_3 \text{ ग}_2) - \text{ख}_1 (\text{क}_2 \text{ ग}_3 - \text{क}_3 \text{ ग}_2) + \text{ग}_1 (\text{क}_2 \text{ ख}_3 - \text{क}_3 \text{ ख}_2)$$

$$\text{अथवा } \left| \begin{array}{l} \text{क}_1 \text{ ख}_2 \text{ ग}_3 \\ \text{ख}_1 \text{ क}_2 \text{ ग}_3 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} \text{ख}_1 \text{ क}_2 \text{ ग}_2 \\ \text{क}_2 \text{ ग}_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \text{क}_2 \text{ ख}_3 \\ \text{क}_3 \text{ ख}_2 \end{array} \right|$$

$$\text{अथवा } \left| \begin{array}{l} \text{क}_1 \text{ ख}_2 \text{ ग}_1 \\ \text{क}_2 \text{ ख}_2 \text{ ग}_2 \\ \text{क}_3 \text{ ख}_3 \text{ ग}_3 \end{array} \right| \text{ प्राप्त होता है ।}$$

अतः स्तम्भों का पंक्तियों में अथवा पंक्तियों का स्तम्भों में परिवर्तन करने से निश्चायक अपरिवर्तित रहता है ।

(२) दो अनुगामी स्तम्भों के अथवा पंक्तियों के व्यति-  
हरण (interchange) से निश्चायक के चिह्न में परिवर्तन  
होता है

अर्थात् यह सिद्ध करना है कि

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ख_1 & क_1 & ग_1 \\ ख_2 & क_2 & ग_2 \\ ख_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

निश्चायकों का विस्तार प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों  
में करने पर

$$\begin{aligned} \text{धाम पक्ष} &= क_1 (ख_2 ग_3 - ख_3 ग_2) - ख_1 (क_2 ग_3 - क_3 ग_2) \\ &\quad + ग_1 (क_2 ख_3 - क_3 ख_2) \end{aligned}$$

और दक्षिण पक्ष

$$\begin{aligned} &= - [ख_1 (क_2 ग_3 - क_3 ग_2) - क_1 (ख_2 ग_3 - ख_3 ग_2) \\ &\quad + ग_1 (ख_2 क_3 - ख_3 क_2)] \\ &= - ख_1 (क_2 ग_3 - क_3 ग_2) + क_1 (ख_2 ग_3 - ख_3 ग_2) \\ &\quad - ग_1 (ख_2 क_3 - ख_3 क_2) \\ &= क_1 (ख_2 ग_3 - ख_3 ग_2) - ख_1 (क_2 ग_3 - क_3 ग_2) \\ &\quad + ग_1 (ख_2 क_3 - क_3 ख_2) \end{aligned}$$

अतः दक्षिण पक्ष धाम पक्ष के सम है।

(३) यदि किसी निश्चायक की दो पंक्तियाँ अथवा दो  
स्तम्भ स्यांगसम हों तो निश्चायक लुप्त हो जाता है।  
(अर्थात् निश्चायक की अर्धा शून्य के सम हो जाती है)

$$\begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

इस निश्चायक पर जिसमें दो

स्तम्भ सर्वांगसम हैं विचार करो।

यदि प्रथम और द्वितीय स्तम्भों का व्यतिहरण किया जाय तो निश्चायक के रूप में परिवर्तन नहीं होता। अतः उसकी अर्थां चही रहती है। किन्तु गुण (२) के अनुसार निश्चायक के चिह्न में परिवर्तन होता है।

$$\text{अतः} \quad \begin{vmatrix} क_1 & क_2 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{अर्थात् } २ \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} = ०$$

$$\text{अथवा} \quad \begin{vmatrix} क_1 & क_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & क_3 & ग_3 \end{vmatrix} = ०$$

(४) यदि किसी निश्चायक में किसी स्तम्भ के अथवा किसी पंक्ति के प्रत्येक संघटक का प से गुणन किया जाय तो वस्तु निश्चायक प से गुणित होता है।

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & क_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \quad \text{इस निश्चायक में प्रथम स्तम्भ के}$$

प्रत्येक संघटक का प से गुणन करने पर

$$\text{निश्चायक} \quad \begin{vmatrix} पक_1 & ख_1 & ग_1 \\ पक_2 & ख_2 & ग_2 \\ पक_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \quad \text{प्राप्त होता है।}$$

अब इस निश्चायक का प्रथम स्तम्भ के संघटकों के पदों में विस्तार करने पर

$$\begin{vmatrix} \text{पक}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{पक}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{पक}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \text{पक}_1 \begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} - \text{पक}_2 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_3 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_2 \end{vmatrix} + \text{पक}_3 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \text{प} \left[ \text{क}_1 \begin{vmatrix} \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} - \text{क}_2 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_3 \\ \text{ख}_3 & \text{ग}_2 \end{vmatrix} + \text{क}_3 \begin{vmatrix} \text{ख}_1 & \text{ग}_2 \\ \text{ख}_2 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= \text{प} \begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix}$$

उपप्रेम्य १— यदि किसी निश्चायक में किसी स्तम्भ के अथवा किसी पंक्ति के संघटक क्रमशः दूसरे स्तम्भ के अथवा दूसरी पंक्ति के संघटक के प गुना हों तो निश्चायक लुप्त होता है।

पहले गुण (४) का ओर फिर (३) का प्रयोग करने से यह स्पष्ट होगा।

उपप्रेम्य २ — यदि किसी निश्चायक में किसी स्तम्भ के अथवा किसी पंक्ति के सब संघटकों के चिह्न परिवर्तित किए जायें तो निश्चायक का चिह्न परिवर्तित होता है क्योंकि यह दत्त निश्चायक को —१ से गुणा करने के समान है।

(५) यदि किसी भी पंक्ति का अथवा किसी भी स्तम्भ का



प्रत्येक संघटक दो अथवा दो से अधिक राशियों का योग हो तो निश्चायक दो अथवा दो से अधिक निश्चायकों के योग से व्यक्त किया जा सकता है।

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \text{क}_1 + \text{अ}_1 & \text{ख}_1 \text{ ग}_1 \\ \text{क}_2 + \text{अ}_2 & \text{ख}_2 \text{ ग}_2 \\ \text{क}_3 + \text{अ}_3 & \text{ख}_3 \text{ ग}_3 \end{array} \right| \text{ इस निश्चायक पर विचार करो।} \end{array}$$

इसका प्रथम स्तम्भ क संघटकों के पदों में विस्तार करने पर निश्चायक

$$= (\text{क}_1 + \text{अ}_1) \left| \begin{array}{cc} \text{ख}_2 \text{ ग}_2 & -(\text{क}_2 + \text{अ}_2) \left| \begin{array}{cc} \text{ख}_1 \text{ ग}_1 & \\ \text{ख}_3 \text{ ग}_3 & \end{array} \right| \\ \text{ख}_3 \text{ ग}_3 & \end{array} \right| + (\text{क}_3 + \text{अ}_3) \left| \begin{array}{cc} \text{ख}_1 \text{ ग}_1 & \\ \text{ख}_2 \text{ ग}_2 & \end{array} \right|$$

$$= \text{क}_1 \left| \begin{array}{cc} \text{ख}_2 \text{ ग}_2 & \\ \text{ख}_3 \text{ ग}_3 & \end{array} \right| - \text{क}_2 \left| \begin{array}{cc} \text{ख}_1 \text{ ग}_1 & \\ \text{ख}_3 \text{ ग}_3 & \end{array} \right| + \text{क}_3 \left| \begin{array}{cc} \text{ख}_1 \text{ ग}_1 & \\ \text{ख}_2 \text{ ग}_2 & \end{array} \right|$$

$$+ \text{अ}_1 \left| \begin{array}{cc} \text{ख}_2 \text{ ग}_2 & \\ \text{ख}_3 \text{ ग}_3 & \end{array} \right| - \text{अ}_2 \left| \begin{array}{cc} \text{ख}_1 \text{ ग}_1 & \\ \text{ख}_3 \text{ ग}_3 & \end{array} \right| + \text{अ}_3 \left| \begin{array}{cc} \text{ख}_1 \text{ ग}_1 & \\ \text{ख}_2 \text{ ग}_2 & \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 & \text{अ}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 & + \text{अ}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 & \text{अ}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{array} \right|$$

(६) यदि किसी निश्चायक में किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के संघटक क्रमशः विभिन्न अचलों से गुणित अन्य पंक्तियों अथवा स्तम्भों के संवादो संघटकों के बीजीय योग के सम हों तो निश्चायक शून्य के सम होता है।

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} \text{मख}_1 + \text{नग}_1 & \text{ख}_1 \text{ ग}_1 \\ \text{मख}_2 + \text{नग}_2 & \text{ख}_2 \text{ ग}_2 \\ \text{मख}_3 + \text{नग}_3 & \text{ख}_3 \text{ ग}_3 \end{array} \right| \text{ इस निश्चायक पर विचार} \end{array}$$

करो । इसमें प्रथम स्तम्भ के संघटक अपेक्षित प्रतिबंध का पालन करते हैं ।

यह निश्चायक

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} म_1 & ग_1 & ग_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} न_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| \\ = \left| \begin{array}{ccc} म_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} न_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| \quad (५) \text{ से} \\ \left| \begin{array}{ccc} म_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} न_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} ख_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} ग_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| \\ = \left| \begin{array}{ccc} म_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} न_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| \quad (४) \text{ से} \\ \left| \begin{array}{ccc} ख_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} ग_1 & ख_1 & ग_1 \end{array} \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{l} = \text{शून्य} \quad + \quad \text{शून्य} \quad (३) \text{ से} \\ = 0 \end{array}$$

(७) यदि किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के संघटकों में, अन्य पंक्तियों अथवा स्तम्भों के संघादी संघटकों को अचल गुणकों से गुणा करने पर जोड़ा जाय तो निश्चायक की अर्धा अपरि-  
यर्तित रहती है ।

$$\left| \begin{array}{ccc} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{array} \right| \quad \text{इस निश्चायक पर विचार करो ।}$$

प्रथम स्तम्भ के संघटकों में म गुना द्वितीय स्तम्भ के संघादी संघटक और न गुना तृतीय स्तम्भ के संघादी संघटक जोड़ने से यह निश्चायक प्राप्त होता है ।

$$\left| \begin{array}{ccc} क_1 + म_1 & + न_1 & ख_1 \quad ग_1 \\ क_2 + म_2 & + न_2 & ख_2 \quad ग_2 \\ क_3 + म_3 & + न_3 & ख_3 \quad ग_3 \end{array} \right|$$

यह निश्चायक तीन निश्चायकों के योग से व्यक्त किया जा सकता है। अतः यह निश्चायक

$$\begin{vmatrix} क_1 & ख_1 & ग_1 \\ क_2 & ख_2 & ग_2 \\ क_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ख_1 & ख_2 & ग_1 \\ ख_2 & ख_3 & ग_2 \\ ख_3 & ख_4 & ग_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ग_1 & ख_1 & ग_1 \\ ग_2 & ख_2 & ग_2 \\ ग_3 & ख_3 & ग_3 \end{vmatrix} \text{ के}$$

सम है। अन्त के दो निश्चायक लुप्त हो जाते हैं। अतः निश्चायक की अर्धा अपरिवर्तित रहती है।

उदाहरण १— दिखाओ कि निश्चायक

$$\begin{vmatrix} ख + ग & क & १ \\ ग + क & ख & १ \\ क + ख & ग & १ \end{vmatrix}$$

लुप्त होता है।

प्रथम स्तम्भ के संघटकों में द्वितीय स्तम्भ के संघादी संघटक जोड़ने से

$$\text{निश्चायक} = \begin{vmatrix} क + ख + ग & क & १ \\ क + ख + ग & ख & १ \\ क + ख + ग & ग & १ \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ के संघटकों में से समापवर्तक (क + ख + ग)

निकाल देने से

$$(क + ख + ग) \begin{vmatrix} १ & क & १ \\ १ & ख & १ \\ १ & ग & १ \end{vmatrix} \text{ यह निश्चा-}$$

यक प्राप्त होता है।

इस निश्चायक में दो स्तम्भ सर्वांगसम होने से यह लुप्त होता है। इसलिए दत्त निश्चायक लुप्त होता है।

उदाहरण २—

$$\begin{vmatrix} खग & क & क^2 \\ गक & ख & ख^2 \\ कख & ग & ग^2 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} १ & क^2 & क^3 \\ १ & ख^2 & ख^3 \\ १ & ग^2 & ग^3 \end{vmatrix}$$

इस पेकात्म्य को सिद्ध करो ।

वाम पक्ष के निश्चायक का नि से अभिधान करने पर

$$\text{नि} = \begin{vmatrix} \text{खग} & \text{क} & \text{क}^2 \\ \text{गक} & \text{ख} & \text{ख}^2 \\ \text{कख} & \text{ग} & \text{ग}^2 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति का क से द्वितीय का ख से और तृतीय का ग से गुणन करने पर

$$\text{कखगनि} = \begin{vmatrix} \text{कखग} & \text{क}^2 & \text{क}^3 \\ \text{कखग} & \text{ख}^2 & \text{ख}^3 \\ \text{कखग} & \text{ग}^2 & \text{ग}^3 \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ के संघटकों में से समापवर्तक कखग निकाल देने पर

$$\text{कखग नि} = \text{कराग} \begin{vmatrix} १ & \text{क}^2 & \text{क}^3 \\ १ & \text{ख}^2 & \text{ख}^3 \\ १ & \text{ग}^2 & \text{ग}^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{अर्थात् नि} = \begin{vmatrix} १ & \text{क}^2 & \text{क}^3 \\ १ & \text{ख}^2 & \text{ख}^3 \\ १ & \text{ग}^2 & \text{ग}^3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{राग} & \text{क} & \text{क}^2 \\ \text{गक} & \text{ख} & \text{ख}^2 \\ \text{कख} & \text{ग} & \text{ग}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} १ & \text{क}^2 & \text{क}^3 \\ १ & \text{ख}^2 & \text{ख}^3 \\ १ & \text{ग}^2 & \text{ग}^3 \end{vmatrix}$$

$$\text{उदाहरण ३—} \begin{vmatrix} १ & १ & १ \\ \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{क}^2 & \text{ख}^2 & \text{ग}^2 \end{vmatrix} \text{ की अर्था निकालो ।}$$

प्रथम स्तम्भ में से द्वितीय को और द्वितीय में से तृतीय

को घटाने पर  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \text{क}-\text{ख} & \text{ख}-\text{ग} & \text{ग} \\ \text{क}^2-\text{ख}^2 & \text{ख}^2-\text{ग}^2 & \text{ग}^2 \end{vmatrix}$  प्राप्त होता है।

प्रथम स्तम्भ में से (क-ख) और द्वितीय में से (ख-ग) समापवर्तक निकाल देने पर

$$(\text{क}-\text{ख})(\text{ख}-\text{ग}) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \text{ग} \\ \text{क}+\text{ख} & \text{ख}+\text{ग} & \text{ग}^2 \end{vmatrix} \text{ प्राप्त होता है।}$$

इस निश्चायक का विस्तार प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में करने पर

$$(\text{क}-\text{ख})(\text{ख}-\text{ग}) [\text{ख}+\text{ग}-\text{क}-\text{ख}]$$

अर्थात् (क-ख) (ख-ग) (ग-क) प्राप्त होता है

$$\text{अतः} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{क} & \text{ख} & \text{ग} \\ \text{क}^2 & \text{ख}^2 & \text{ग}^2 \end{vmatrix} = (\text{क}-\text{ख})(\text{ख}-\text{ग})(\text{ग}-\text{क})$$

१५.५ उपनिश्चायक और सहगुणक (minors and co-factors)

$$\begin{vmatrix} \text{क}_1 & \text{ख}_1 & \text{ग}_1 \\ \text{क}_2 & \text{ख}_2 & \text{ग}_2 \\ \text{क}_3 & \text{ख}_3 & \text{ग}_3 \end{vmatrix} \text{ इस निश्चायक पर विचार करो।}$$

संघटक क, प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ में है।

प्रथम पंक्ति और प्रथम स्तम्भ [जिनमें क, है] को हटाने पर जो निश्चायक रह जाता है वह क<sub>१</sub> का उप-

निश्चायक कहलाता है। यदि मूल निश्चायक का नि से अभिधान किया जाय तो क, के उपनिश्चायक का नि, से अभिधान किया जायगा। इसी प्रकार ख, और ग, संघटकों के उपनिश्चायकों का क्रमशः नि<sub>१</sub>, नि<sub>२</sub>, से अभिधान होगा। अतः दत्त निश्चायक का प्रथम पंक्ति के संघटकों के पदों में अभिव्यक्त विकास यह होगा—

नि = क, नि<sub>१</sub>, - ख, नि<sub>२</sub>, + ग, नि<sub>३</sub>, अथवा यदि विस्तार प्रथम स्तम्भ के संघटकों के पदों में किया जाय तो

नि = क, नि<sub>१</sub>, - क, नि<sub>२</sub>, + क, नि<sub>३</sub>,

उपर्युक्त विस्तारों में घन और ऋण चिह्नों की उपस्थिति पदसंहति के प्रयोग को कठिन बनाती है। अतः चिह्नित उपनिश्चायक अथवा सहगुणकों के प्रयोग से इस को सरल बनाया जा सकता है।

किसी निश्चायक में किसी संघटक का सहगुणक समुचित चिह्न सहित लिख गए उसीके उपनिश्चायक के सम होता है। किसी संघटक के सहगुणक का इस के दीर्घ अक्षर से अभिधान किया जाता है। उदाहरणार्थ क, ख, ग, के सहगुणकों का क्रमशः का, खा, गा, से अभिधान होगा।

सहगुणक संकेतना के प्रयोग से निश्चायक के विस्तार में सब पदों के चिह्न एक ही रहते हैं। इस संकेतना का प्रयोग करने पर निश्चायक नि का यह विकास होगा—

नि = क, का, + ख, खा, + ग, गा,

अथवा नि = क, का, + क, का, + क, का,

क्योंकि सहगुणक केवल उपयुक्त चिह्न लगाया हुआ उपनिश्चायक होता है इसलिए संवादी उपनिश्चायक की अर्हा से सहगुणक की अर्हा प्राप्त करने के लिए निम्न-लिखित नियम हैं—

नियम—अग्र संघटक से, संघटक की स्थिति पंक्ति अथवा स्तम्भ अथवा दोनों पर गिनो। संघटक की स्थिति युग्म और अयुग्म होने के अनुसार, उसका सहगुणक क्षण अथवा धन चिह्न लगे हुए संवादी उपनिश्चायक के सम है। उदाहरणार्थ ख<sub>३</sub> का सहगुणक खा<sub>३</sub> और उपनिश्चायक नि<sub>३</sub> है। क्योंकि अग्र संघटक से गिने जाने पर ख<sub>३</sub> युग्म स्थिति पर है इसलिए

खा<sub>३</sub> = - नि<sub>३</sub>

## प्रठनावलि २१

इन निश्चायकों की अर्हाएं निकालो—

$$(१) \begin{vmatrix} २४ & ८ & ३ \\ १५ & ७ & १ \\ ११ & २ & ४ \end{vmatrix}$$

$$(२) \begin{vmatrix} १९ & २ & १७ \\ ७ & ५ & २ \\ १२ & ३ & ९ \end{vmatrix}$$

$$(३) \begin{vmatrix} ४ & २ & ५ \\ १ & १ & ६ \\ ७ & ३ & ० \end{vmatrix}$$

$$(४) \begin{vmatrix} ५२ & १३ & ६७ \\ ७० & १७ & ८९ \\ ७९ & १९ & १०२ \end{vmatrix}$$

$$(५) \begin{vmatrix} क & ज & छ \\ ज & ख & च \\ छ & च & ग \end{vmatrix}$$

$$(६) \begin{vmatrix} १ & ओ & ओ^२ \\ ओ & ओ^२ & १ \\ ओ^२ & १ & ओ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} जहां ओ एक \\ का धनमूल है। \end{vmatrix}$$

(७) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} 1 & क & क^2 - खग \\ 1 & ख & ख^2 - कग \\ 1 & ग & ग^2 - कख \end{vmatrix} = 0$$

(८) दिखाओ कि  $\begin{vmatrix} क+ख & ख+ग & ग+क \\ त+थ & थ+द & द+त \\ ट+ठ & ठ+ड & ड+ट \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} क & ख & ग \\ त & थ & द \\ ट & ठ & ड \end{vmatrix}$

(९) सिद्ध करो कि  $\begin{vmatrix} य & क_1 & क_2 \\ क_1 & य & क_1 \\ क_1 & क_1 & य \end{vmatrix}$

$$= (य - क_1)(य - क_2)(य + क_1 + क_2) \quad [\text{रंगुन १९३९}]$$

(१०) निश्चायक  $\begin{vmatrix} ख^2ग^2 & खग & ख+ग \\ ग^2क^2 & गक & ग+क \\ क^2ख^2 & कख & क+ख \end{vmatrix}$  की अर्हा निफालो

(११) सिद्ध करो कि

$$\begin{vmatrix} क-ख-ग & २क & २ख \\ २ख & ख-ग-क & २ख \\ २ग & २ग & ग-क-ख \end{vmatrix} = (क+ख+ग)^2$$

(१२) निम्न-लिखित पेकात्म्य-सिद्ध करो

$$\begin{vmatrix} (र+ल)^2 & य^2 & य^2 \\ र^2 & (ल+य)^2 & र^2 \\ ल^2 & ल^2 & (य+र)^2 \end{vmatrix} = २यरल(य+र+ल)^2$$



## उत्तरमाला

### प्रश्नावलि १

- (१)  $y=3, x=4$       (२)  $y=7, x=6$   
 (३)  $y=\frac{3}{2}, x=\frac{5}{2}$       (४)  $y=-\frac{8}{3}, x=\frac{7}{3}$

### प्रश्नावलि २

- (१) (अ)  $\frac{y^3}{x^4}$       (आ)  $\frac{1}{y^2}$       (इ)  $\frac{1}{x^5}$       (ई)  $\frac{y^3}{x^2}$   
 (उ)  $\frac{1}{y^3}$       (ऊ)  $\frac{1}{y^2 x^3}$
- (२) (अ) २      (आ)  $\sqrt{3}$       (इ)  $\frac{32}{3}$       (ई)  $\frac{16}{25}$   
 (३)  $\frac{x^4}{y}$       (४) दूसरा बड़ा है।      (५)  $\frac{27}{8}$
- (६) (अ)  $y-1$       (आ)  $y^3-x^3$   
 (इ)  $4y^2 + 8y^2 + 9$

$$(7) y^2 + y^2 r^2 + y^2 r^2 + y r + y^2 r^2 + r^2$$

$$(8)(क) \frac{1}{y^2 r^2 \times l^2} \quad (ख) \frac{y^2 - r^2}{y^2 r^2}$$

$$(ग) y^2 \quad (घ) y r^2 l^2$$

$$(ङ) 1 \quad (च) y^2 - y^2 - r^2$$

$$(छ) \frac{1}{y^2 r^2} \quad (ज) 1$$

$$(9) (क) r^2 - 2 \quad (ख) r^2 - 3r \quad (ग) r^2 - 4r^2 + 2$$

$$(10) m = \frac{n}{n-1}$$

### प्रश्नावलि ३

$$(1) 4\sqrt{6}, 8\sqrt{4}, 2\sqrt{3}, 8\sqrt{3}, 2\sqrt{12}$$

$$(2) (क) 7 - \sqrt{3}, \quad (ख) 3 - \sqrt{4}, \quad (ग) \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$(3) (क) 7^2 - 2 \times 7^2 + 4 \quad (ख) 4^2 - 3 \times 4^2 + 9$$

$$(ग) 3^2 - 3^2 \times 2^2 + 2^2$$

$$(4) (क) 2 - \sqrt{3} \quad (ख) \frac{2 + \sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$$

$$(ग) \frac{7 - 3\sqrt{3} - \sqrt{4} + 2\sqrt{12}}{11}$$

$$(५) \frac{2}{3} \sqrt{5} [\sqrt{5} - 1]$$

$$(६) (क) ३-२ श (ख) १-३ श (ग) ७-५ श$$

$$(७) (क) १७+७ श (ख) १०+५४ श$$

$$(८) (क) \frac{३-२श}{१३} (ख) \frac{७-८श}{११३} (ग) \frac{३-\sqrt{-२}}{११}$$

$$(घ) \frac{३२३-३६श}{३२५}$$

$$(९) (अ) -१+२श (आ) -\frac{१}{५} + \frac{२}{५} श$$

$$(इ) (३क+२ख) + (३-२कख) श$$

$$(ई) २(१-\sqrt{३}) + २(१+\sqrt{३}) श$$

$$(१०) (क) य=२, र=-३ (ख) य=३, र=-५$$

$$(ग) य=२, र=-२ (घ) य=४, र=१$$

$$य=६, र=-\frac{२}{३}$$

$$(११) (क) \pm [३+४श] (ख) \pm [३+२श]$$

$$(ग) \pm [२-श]$$

### प्रश्नावलि ४

$$(१) (अ) \frac{१}{३} (२९-२स) (आ) ७स-५ (इ) ९स-५$$

$$(ई) \frac{स}{क}$$

$$(उ) \frac{स^२-स+१}{स}$$

- (२) (अ) ८६७३ (आ) ८४० (इ) ९२३  
 (ई) ६३ (उ) ३३२.८५ (ऊ) १३५१/५  
 (ए)  $\frac{x}{2} [(4+x)k - 2x(8+x)]$  (ऐ)  $s^2$

(३) (अ)  $\frac{4}{3}, \frac{24}{12}, \frac{4}{2}, \dots$

(आ) ७, १२, १७, .....

(इ) ६, ११, १६, २१, .....

(ई)  $s^2 + 1 - s, s^2 + 2(1 - s), s^2 + 3(1 - s)$

(उ)  $k + \frac{x-k}{2(s+1)}, k + \frac{x-k}{s+1}, k + \frac{3(x-k)}{2(s+1)}$

$$\text{मध्यपद} = \frac{k}{2} + \frac{x}{2}$$

(५) १६५

(६)  $p_{40} = 104$   $yo_{40} = 2000$  (८) १३, १७, २१

(९) २, ३,  $\frac{1}{2}$ , ५,  $\frac{1}{2}$ , ८ (११) ३७ (१२) ७२

(१३) २० (१४) १६ (१५) २५ (१६) १४

(१७) ३६ (१८) २५ (१९) ५०५०० यष्टियां

(२४)  $\frac{8}{4}$  (२९) क, ३क, ५क, ... (३१) - (त + घ)

## प्रश्नावलि ५

(१) (क)  $-५१२$  (ख)  $\frac{१५}{३२}$

(ग)  $-\frac{१२८}{१०९३५}$  (घ)  $\frac{२स-१}{३}$

(२) (क)  $२०४६$  (ख)  $\frac{१३३}{२५३}$

(ग)  $\frac{६३(२+\sqrt{२})}{३२}$  (घ)  $\frac{८}{२१} \left[ १ + (-)^{स+१} \times \left( \frac{३}{४} \right)^स \right]$

कट  $[१ - कसठ]$

(ङ)  $\frac{१ - कट}{१ - कसठ}$

(च)  $\frac{\frac{क}{य} \sqrt{\frac{५}{३}} \left[ १ - \left( \sqrt{\frac{३य}{५क}} \right)^स \right]}{१ - \sqrt{\frac{३य}{५क}}}$

$१ - \sqrt{\frac{३य}{५क}}$

(३) ३, ६, १२ (४)  $\frac{४}{५}, ४, २०$

(८) ४ (९)  $\frac{३स-१}{२}$

(१०) (क)  $\frac{१}{२}, \frac{१}{३}, १, ३$  (ख) ६, १८, ५४, १६२

(ग)  $\frac{१६}{२७}, \frac{८}{९}, \frac{४}{३}, २, ३$  (घ) ९, ३,  $\frac{१}{३}, ९$

$$(11) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(12) 3, 12 \quad (16) \frac{k}{n-1} \left[ \frac{n(n^2-1)}{n-1} - s \right] \text{ जहाँ}$$

क प्रथम पद है और न' साधारण निष्पत्ति है

$$(23) \sqrt{mn}, m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}} \quad (23) 12\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}$$

प्रश्नावलि ६

$$(1) (क) \frac{1}{1-y} + \frac{2y}{(1-y)^2} - \frac{2y^2}{(1-y)^3} - \frac{(2s-1)y^3}{1-y}$$

$$(ख) 8 - \frac{1}{2s-2} - \frac{s}{2s-1}$$

$$(ग) -\frac{1}{6} - \frac{5}{36} [7s+1-1] + \frac{5s+1}{6} \times 7s+1,$$

$$(2) (क) \frac{3}{2}(\sqrt{3}+1) \quad (ख) \frac{9}{8} \quad (ग) \frac{5\sqrt{1}}{8}$$

$$(घ) \frac{8+3\sqrt{2}}{2} \quad (3) \quad (क) \frac{3}{6} \quad (ख) \frac{2\sqrt{1}}{16}$$

$$(ग) 8 \quad (घ) 1$$

$$(४) (क) \frac{३स(स+१)}{२} + \frac{५}{४}(५स-१)$$

$$(ख) \frac{य(१-यस)}{१-य} + \frac{कस(स+१)}{२} \quad (ग) \frac{कय-ख}{य^२-१}$$

$$(घ) कस^२ + ख(२स-१)$$

$$(५) \frac{८}{३} + \frac{१}{३ \times २^{१४}-१} - \frac{१}{३ \times २^{१४}-३} - \frac{१}{३ \times २^{१४}-५} = \frac{८}{३}$$

(६) सवाँ पद  $खयस^{१४}(य-१)$  । प्रथम पद  $क+खय$  है प्रथम पद से आगे सब पद गुणोत्तर श्रेणी में हैं ।

$$(७) (क) \frac{८५७}{२४७५} \quad (ख) \frac{५}{९} \quad (ग) \frac{४७}{१९८} \quad (१०) ९$$

### प्रश्नावलि ७

$$(१) (क) \frac{१}{६८}, \frac{१}{१३२}, \frac{१}{१२६}, \frac{१}{२६०} \quad (ख) \frac{१६}{५}, \frac{१६}{६}, \frac{१६}{७}$$

$$(ग) \frac{१'१०}{१२१}, \frac{५'५}{४६}, \frac{५०}{२१}, \frac{७'१}{१७} \quad (घ) \frac{३}{४}, \frac{६}{११}, \frac{३}{७}, \frac{६}{१७}, \frac{३}{१०}$$

$$(२) \frac{१}{३}, \frac{१}{४}, \frac{१}{५} \quad (३) \frac{(न-१)कग}{क(स-१)+ग(स-न)}$$

$$(८) ८, ७२ \quad (९) १२, ३$$

## प्रश्नावलि ८

(१) (क)  $\frac{2}{3}$  स  $(स+१)(२स+१)$

(ख)  $\frac{2}{5}$  स  $(४स^२-१)$

(ग)  $\frac{१}{१२}$  स  $(स+१)(३स^२+१९स+८)$

(घ)  $\frac{१}{१२}$  स  $(स+१)(स+२)(३स+१)$

(च)  $\frac{स}{२}$   $(६स^२+३स-१)$

(छ)  $स^२ (२स^२-१)$

(ज) यदि स युग्म हो तो  $-\frac{स}{२}(स+१)$  और स.के

अयुग्म होने पर  $\frac{स}{२}(स+१)$  , ,

(३) (क)  $२^४+१$  ;  $२ (२^४-१)+स$

(ख)  $स^२+१$  ;  $\frac{१}{६}$  स  $(२स^२+३स+७)$



- (ग)  $\frac{1}{2} (3x-1) ; \frac{3}{4} (3x-1) - \frac{x}{2}$
- (घ)  $x^2 + 2x - 1 ; \frac{1}{4} x (2x^2 + 9x + 1)$
- (ङ)  $2x^{+1} - 2 ; \frac{1}{4} (2x-1) - 2x$
- (५) (क)  $\frac{1}{3} x (x+1)(x+2)$
- (ख)  $\frac{x}{4} (8x^2 + 14x + 1)$
- (ग)  $\frac{1}{4} x (x+1)(9x^2 + 19x + 6)$
- (घ)  $\frac{1}{24} x (x+1)(x+2)(3x+1)$
- (ङ)  $\frac{1}{12} x (x+1)(3x^2 + 11x + 6)$
- (च)  $\frac{1}{6} x (x+1)(2x^2 + 2x - 1)$
- (छ)  $\frac{1}{3} x (x+1)(4x^2 + 4x - 1)$
- (ज)  $\frac{1}{48} x (x+1)(x+2)(3x+4)$
- (झ)  $\frac{1}{6} x (x^2 - 1)$

$$(अ) \frac{1}{12} स (स+1)^2 (स+2)$$

$$(६) (क) \left[ \frac{10}{9} (10^8 - 1) - स \right]$$

$$(ख) \left[ \frac{10}{27} (10^8 - 1) - \frac{स}{3} \right]$$

$$(ग) \left[ \frac{20}{27} (10^8 - 1) - \frac{2स}{3} \right]$$

### प्रश्नावलि ९

$$(१) (ब) \text{ वास्तविक और असम; } १, ३$$

$$(छ) \text{ वास्तविक और अपरिमेय; } १ \pm \sqrt{३}$$

$$(ज) \text{ वास्तविक और समान; } ७, ७$$

$$(झ) \text{ संकर; } १ \pm \sqrt{-१.३}$$

$$(२) (च) x^2 - १२x + ३५ = 0 \quad (छ) x^2 - x - १२ = 0$$

$$(ज) x^2 + ८x + १५ = 0 \quad (झ) y^2 - २y - १ = 0$$

$$(ट) x^2 + ४x + १ = 0 \quad (ठ) y^2 - ६y - ३२ = 0$$

$$(ड) x^2 + ६x + १३ = 0$$

$$(ड) x^2 + २x + ५ = 0$$

$$(३) (च) २, \frac{१}{२} \quad (छ) -\frac{३}{३} \quad (ज) -\frac{५}{२}$$

(९) (च) क और ग समानचिह्न के किन्तु ख विपरीत चिह्न का। (छ) क और ख समानचिह्न के किन्तु ग विपरीत चिह्न का।

(१०) १०,  $2\sqrt{6}$ , १

(१२) (च)  $\frac{x^4 - 4x^2kg + 2k^2g^2}{k^2}$

(छ)  $\frac{x^4 - 4x^2kg + 2k^2g^2}{k^2g}$

(ज)  $\frac{g^2x(x^2 - 2kg)}{k^2}$

(१४) (च)  $\frac{t}{y^2}(t^2 - 2y)$

(छ)  $\frac{t\sqrt{t^2 - 4y}(t^2 - 2y)}{y^2}$

(ज)  $\frac{t(t^2 - 2y)\sqrt{t^2 - 4y}}{y^2} \times$

$(t^4 + 4y^2 - 4t^2y - 2t^2y^2)$

(१५)  $y^2 + 2 = 0$       (१६)  $3y^2 + 1 = 0$

(१७) (१)  $xg y^2 + (kg + x^2)y + kx = 0$

(२)  $k^2y^2 - 2k^2(x^2 - 2kg)y + x^2(x^2 - 4kg) = 0$

- (१८) (१)  $यय^2 - (त^2 - २य)य + य = ०$   
 (२)  $यय^2 - २तय + ४ = ०$   
 (३)  $य^2य^2 - त(त^2 - ३य)य + १ = ०$   
 (४)  $य^2 - (त + \frac{त}{य})य + २ + य + \frac{१}{य} = ०$

### प्रश्नावलि १०

- (१)  $य$  की  $\frac{८}{३}$  से बड़ी और  $-\frac{५}{२}$  से छोटी मर्द्दाओं के लिए  
 (२)  $य$  की ३ से बड़ी तथा  $-२$  से छोटी मर्द्दाओं के लिए  
 (३)  $२ < य < ७$   
 (१४) (१)  $त = -३$  (२)  $त = १०$  (३)  $त = २$   
 (१५)  $-\frac{११}{४}$  अथवा  $\frac{७}{८}$   
 (२१)  $क = ०$  अथवा ९  
 (२२)  $[क क, -ख ख,]^2 + ४ [ज ख, + ज, क] + [क ज, + क, ज] = ०$

### प्रश्नावलि ११

- (१)  $य = २७, \frac{१२५}{३०८७}$  (२)  $य = २, य = ८$

$$(3) \quad y=0, \quad y=-\frac{3}{8} \quad y=-4$$

$$(4) \quad y=1, 2, \quad \frac{3 \pm \sqrt{-1}}{2}$$

$$(5) \quad y=2, -3, \quad \frac{-3 \pm \sqrt{-183}}{6}$$

$$(6) \quad y=-6, -2, \quad \frac{-14 \pm \sqrt{82}}{2}$$

$$(7) \quad y=0, -4, \quad \frac{-4 \pm \sqrt{-14}}{2}$$

$$(8) \quad y=-8, -8 \pm \sqrt{17} \quad (9) \quad y=7$$

$$(10) \quad y=2, -\frac{1}{2} \quad (11) \quad y=0, -3$$

$$(12) \quad y=0, 3 \quad (13) \quad y=\pm 3$$

$$(14) \quad y=1, 2 \quad (15) \quad y=-\frac{8}{9}, 4$$

$$(16) \quad y=8, \frac{1}{8}, 2, \frac{1}{2} \quad (17) \quad y=-2, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$$

$$(18) \quad y=, -4, -\frac{1}{4}, -3, -\frac{1}{3} \quad (19) \quad y=1, \frac{1}{2}, 2,$$

$$\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$$

## प्रश्नावलि १२

(१)  $y=2, r=1; y=1, r=2$  (२)  $y=2, r=1;$

$y=18, r=-29$  (३)  $y=\frac{3}{4}, r=\frac{4}{5}$

(४)  $y=1, r=-2; y=-\frac{36}{13}, r=\frac{6}{13}$

(५)  $y=1, r=4; y=8, r=2$  (६)  $y=6, r=3;$

$y=3, r=6$  (७)  $y=\frac{1}{3}, r=\frac{1}{2}, y=\frac{5}{2},$

$r=-\frac{5}{3}$

(८)  $y=2, r=6; y=6, r=2$  (९)  $y=3, r=6;$

$y=6, r=3$  (१०)  $y=23, r=1; y=2, r=22$

(११)  $y=8, r=6; y=6, r=8$

(१२)  $y=1, r=3; y=-1, r=-3,$

$y=\frac{3\sqrt{21}}{21}, r=\frac{2\sqrt{21}}{21}; y=-\frac{3\sqrt{21}}{21},$

$r=\frac{-2\sqrt{21}}{21}$

$$(१३) \quad y=२, r=३; y=-२, r=-३$$

$$y = +\frac{४३}{-\sqrt{१५१}}, r = +\frac{२३}{-\sqrt{१५१}}$$

$$(१४) \quad y = +२, r = +२; y = \pm\frac{२}{\sqrt{६}}, r =$$

$$+\frac{४}{\sqrt{६}}$$

$$(१५) \quad y = +\frac{२}{\sqrt{३५}}, r = +\frac{\sqrt{३५}}{७}; y =$$

$$+\frac{३}{२}, r = +\frac{२}{३}$$

$$(१६) \quad y = +२, r = +३, y = +३, r = +२$$

$$(१७) \quad y = -२, r = ३; y = -\frac{१}{२}, r = ०; y = १, r = १;$$

$$y = ३३, r = -५३$$

$$(१८) \quad y = ३, r = १; y = -१, r = -३; y = १ \pm \sqrt{-१०},$$

$$r = -१ \pm \sqrt{-१०}$$

$$(१९) \quad y = ५, r = १; y = १, r = ५$$

$$y = ३ \pm \sqrt{-५८}, r = ३ \mp \sqrt{-५८}$$

$$(२०) \quad y = ३, r = १; y = -१, r = -३;$$

$$y = \pm \sqrt{-६} + १, r = \pm \sqrt{-६} - १$$

$$(२१) \quad y = ७, r = ५; y = -५, r = -७$$

$$(२२) \quad y = \frac{४}{५}, \quad r = २०; \quad y = \frac{१}{५}, \quad r = ५$$

$$(२३) \quad y = -३, \quad r = -२; \quad y = १, \quad r = २$$

$$(२४) \quad y = ३, \quad r = १; \quad y = १, \quad r = ३$$

$$(२५) \quad y = ४, \quad r = २; \quad y = -२, \quad r = -४;$$

$$y = १ \pm \frac{\sqrt{३}}{११}, \quad r = -१ \pm \frac{\sqrt{३}}{११}$$

$$(२६) \quad y = ३, \quad r = ३; \quad y = -\frac{१}{३}, \quad r = -\frac{१}{३}$$

$$y = ३, \quad r = -\frac{१}{३}; \quad y = -\frac{१}{३}, \quad r = ३$$

$$(२७) \quad y = \pm १, \quad r = \pm ३; \quad y = \pm ३, \quad r = \pm १$$

$$(२८) \quad y = \pm १, \quad r = \pm २; \quad y = \pm २, \quad r = \pm १$$

$$(२९) \quad y = २, \quad r = ४; \quad y = -२\frac{१}{३}, \quad r = -४\frac{१}{३}$$

$$(३०) \quad y = ४\frac{१}{३}, \quad r = ०; \quad y = ९, \quad r = ७$$

### प्रश्नावलि १३

$$(१) \quad y = \pm ५ \sqrt{\frac{१७}{१७७}}, \quad r = \pm ६ \sqrt{\frac{१७}{१७७}},$$

$$z = \pm ७ \sqrt{\frac{१७}{१७७}}$$



$$(२) \quad y = \pm २, \quad r = \pm ६, \quad l = \pm ३$$

$$(३) \quad y = ३, \quad r = २, \quad l = ४; \quad y = २, \quad r = ३, \quad l = ४$$

$$y = २ + \sqrt{-२}, \quad r = २ - \sqrt{-२}, \quad l = ५$$

$$y = २ - \sqrt{-२}, \quad r = २ + \sqrt{-२}, \quad l = ५$$

$$(४) \quad y = १, \quad r = ३, \quad l = २; \quad y = ५, \quad r = १, \quad l = ०$$

$$y = १, \quad r = २, \quad l = ३; \quad y = ५, \quad r = ०, \quad l = १$$

$$(५) \quad y = \frac{१}{२}, \quad r = \frac{१}{३}, \quad l = \frac{१}{४}$$

$$(६) \quad y = \pm १, \quad r = \pm २, \quad l = \pm ३$$

$$(७) \quad y = ५, \quad r = \frac{५}{३}, \quad l = \frac{५}{२}$$

$$y = -७, \quad r = -\frac{११}{३}, \quad l = -\frac{१}{२}$$

$$(८) \quad y = ५, \quad r = ३, \quad l = ६;$$

$$y = -७, \quad r = -५, \quad l = -८$$

$$(९) \quad y = ३, \quad r = ४, \quad l = ५;$$

$$y = -१३, \quad r = -१४, \quad l = -१५$$

$$(१०) \quad y = २, \quad r = ३, \quad l = १;$$

$$y = -६, \quad r = -७, \quad l = -५$$

$$(११) \quad \begin{array}{lll} y=२, & r=३, & ल=४; \\ y=-४, & r=-५, & ल=-६ \end{array}$$

$$(१२) \quad \begin{array}{lll} y=१, & r=१, & ल=१; \\ y=-३, & r=-३, & ल=-३ \end{array}$$

$$(१३) \quad \begin{array}{lll} y=३, & r=४, & ल=५; \\ y=-३, & r=-४, & ल=-५ \end{array}$$

$$(१४) \quad y = \frac{१ + \sqrt{२ख + २ग - २क + १}}{२}$$

$$r = \frac{१ + \sqrt{२क - २ख + २ग + १}}{२}$$

$$ल = \frac{१ + \sqrt{२क + २ख - २ग + १}}{२}$$

$$(१५) \quad y = \pm क \sqrt{\frac{ख + ग - क}{(क + ख - ग)(क + ग - ख)}}$$

$$r = \pm ख \sqrt{\frac{क + ग - ख}{(क + ख - ग)(ख + ग - क)}}$$

$$ल = \pm ग \sqrt{\frac{क + ख - ग}{(क + ग - ख)(ख + ग - क)}}$$

$$(१६) \quad y = \pm ६, r = \pm ४, ल = \pm ५$$

$$(१७) \quad y = \pm \frac{n^2 - थद}{\sqrt{त^2 + थ^2 + द^2 - ३तथद}}$$

$$r = + \frac{y^2 - t d}{\sqrt{t^3 + y^3 + d^3 - 3t y d}}$$

$$l = + \frac{d^2 - t y}{\sqrt{t^3 + y^3 + d^3 - 3t y d}}$$

(१८)  $y = +1, r = +2, l = +3$

### प्रश्नावलि १४

(१) ५६ (२) ४८० (३) ११क८ (४) १००८०

(५)  $\frac{10}{2} \frac{2}{1}$  (६) ५६  $\frac{1}{9}$

(७) (अ)  $\frac{12}{9}$  (आ)  $\frac{11}{7}$  (इ)  $\frac{1}{1-4}$

(ई)  $\frac{1}{1+2}$  (उ)  $\frac{1}{1-1}$

(८) (अ) स (स-१) (आ)  $\frac{1}{1-2}$  (स-२) (स-३)

(१०) ३६०० (११) १२ (१२) ९८८०, २०४७५, ८२१२८८८ (१३) ६०४८०, २५१०२५, ७५२१६०

(१४)  $n = s - 1$  (१६) ३० (१७) ६५ (१८) ३४४

(१९) ११च, ११च, ११च (२०) ३५४ (२१) ९५५

(२२) २४, १०६६५६

$$(23) \frac{\frac{12}{13} \frac{12}{13}}{\frac{13}{13} \frac{13}{13}}$$

$$(24) 2016, 3024$$

$$(25) 20$$

$$(26) 6, 11 \text{ वन}$$

$$(27) 3467200$$

$$(28) \frac{\frac{12}{13}}{\frac{13}{13} \frac{13}{13}}$$

$$(29) 60$$

$$(30) \frac{\frac{12}{13}}{(\frac{13}{13})^2 (\frac{13}{13})^2 \frac{13}{13}}$$

$$(31) \frac{\frac{12}{13}}{\frac{13}{13} \frac{13}{13} \frac{13}{13}} \quad (32) \frac{\frac{12}{13}}{(\frac{13}{13})^2}$$

$$(33) 149 \quad (34) 110 \quad (35) 40 \quad (36) 40$$

$$(37) 243 \quad (38) 4096 \quad (39) 124 \quad (40) 31$$

$$(41) 43, 74 \quad (42) 220$$

$$(43) (1) \frac{1}{2} [n(n-1) - m(m-1) + 2]$$

$$(2) \frac{1}{6} [n(n-1)(n-2) - m(m-1)(m-2)]$$

$$(44) 90$$

## प्रश्नावलि १६

- (१)  $y^4 - ६९y^3 - ४४y + ६७२$  (२) (क) ५ (ख) -५
- (३) (क)  $y^4 + १०y^3 + ४०y^2 + ८०y^2 + ८०y + ३२$   
 (ख)  $६४y^4 + ५७६२y^3 + २१६०२y^2 + ४३२०२y^2$   
 $+ ४८६०२y^2 + २९१६२y + ७२९२$   
 (ग)  $६२५ - २०००y + २४००y^2 - १२८०y^3$   
 $+ २५६y^4$
- (घ)  $१ - \frac{७}{y} + \frac{२१}{y^2} - \frac{३५}{y^3} + \frac{३५}{y^4} - \frac{२१}{y^5} + \frac{७}{y^6} - \frac{१}{y^7}$
- (ङ)  $y^{10} + १५कy^9 + ९०क^2y^8 + २७०क^3y^7$   
 $+ ४०५\frac{क^4}{y^6} + २४३\frac{क^5}{y^5}$
- (च)  $२४३y^4 - २०२५y^3 + ६७५०\frac{१}{y} - ११२५०\frac{१}{y^2}$   
 $+ \frac{९३७५}{y^3} - \frac{३१२५}{y^4}$
- (४) (अ)  $१३६१३६७० क^८y^८$  (आ)  $१६५ \frac{y^९}{क^९}$
- (इ)  $-१२० \frac{y^९}{क^९}$  (ई)  $७६०२y$

(५)  $-252$  अथवा  $(-)^{1 \cdot 1} \cdot 252$

(६) ०, २१० क<sup>१</sup> स<sup>१</sup> (७) ३१२ र<sup>१</sup>

(८) २१० न<sup>१</sup> (९)  $-1 \cdot 1 \cdot 252$  (३)<sup>१</sup>

(१०) यदि स, ३ का अपवर्त्य हो तो  $252 \cdot 3 \cdot (-3 \cdot 1)^3$

अन्यथा कोई भी पद नहीं।

(११)  $252 \cdot 3 \cdot 1$

(१४)  $1 \cdot 1 \cdot 252$  और  $1 \cdot 1 \cdot 252$

(१५)  $-252$  य तथा  $\frac{252}{2}$  (१६)  $-252 \cdot 3$

(१७)  $\frac{252}{2}$  (१८) २ वां पद, ४९५

(१९) ४ वां पद,  $\frac{495}{2}$  (२०)  $n=18$

(२१)  $n=s+1$  (२४)  $n=13$

### प्रश्नावलि १७

(१) ४५ (२) २७१२ य<sup>१</sup> (३) ०

(४) (अ) ११वां पद (आ) ५वां पद (इ) १२वां पद

(५)  $\frac{१६}{१७} < y < \frac{१७}{१६}$

(६) (१)  $\frac{१६५}{८}$  (२)  ${}^{१०}C_१ \left(\frac{३}{२}\right)^१$  (३)  ${}^{१०}C_{१५} ३^{१५}$

(४)  $- {}^{१०}C_१ \times २^{१०} \left(\frac{४}{२५}\right)$

(७)  $२^{८-१} (स+२)$

### प्रश्नावलि १८

(१) (ब)  $(-)^n \frac{३ \times ५ \times ७ \dots (२n+१)}{२^n \underline{n}} y^n$

(छ)  $\frac{१ \times ३ \times ५ \dots (२n-१)}{\underline{n}} \left(\frac{y}{२}\right)^n$

(ज)  $(-)^n \frac{१ \times ३ \times ५ \times ७ \dots (२n-३)}{\underline{n}} y^n$

$$(ब्र) (-)^n (n+1) y^n$$

$$(ट) \frac{1}{27} \frac{[n+1][n+2]}{1 \times 2} \left(\frac{y}{3}\right)^n$$

$$(ठ) \frac{1}{s \sqrt{k}} \frac{(s+1)(2s+1)\dots(n-1)s+1}{s^n n} \times \left[\frac{y}{k}\right]^n$$

$$(ड) \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \dots (2n-2)}{n} \left(\frac{2y}{3}\right)^n$$

$$(ढ) \frac{8 \times 10 \times 12 \dots (2n-2)}{n} y^n$$

$$(२) (च) \frac{11 \times 19 \times 23 \times 27}{4^4} y^4$$

$$(छ) -०.४५ क^{-१.५} रा^३; -३०६१८ क^{-०.५} ख^५$$

$$(ज) \frac{1}{2^{1/2}}$$

$$(३) 1 - 2y - 2y^2 - 8y^3 \dots$$

$$(४) क^3 \left[ 1 - \frac{3y}{क} + \frac{3y^2}{२क^२} + \frac{y^3}{२क^३} + \frac{3y^4}{८क^४} + \frac{3y^5}{८क^५} + \dots \right]$$



$$\dots\dots + \frac{3 \times 1 \times 1 \times 3 \times 5 \dots (2n-5)}{n} \frac{y^n}{k^{3n-3}}$$

$$(4) \quad k \left[ 1 + \frac{y}{2k^2} - \frac{y^2}{4k^4} + \frac{y^3}{8k^6} - \frac{5}{128} \frac{y^4}{k^8} + \dots \right]$$

$$(5) \quad - \frac{7 \times 8 \times 1 \times 2 \times 5 \times 6 \dots (3n-10)}{n}$$

$$(6) \quad \frac{s(s-1)}{2} + [s(s+1)] + \frac{(s+1)(s+2)}{1 \cdot 2}$$

$$(7) \quad (क) 2^{\text{रा}} \text{ पद} \quad (ख) 7^{\text{वा}} \text{ पद} \quad (ग) 9^{\text{वा}} \text{ पद}$$

$$(8) \quad (क) 2.020101 \quad (ख) 1.0039$$

$$(ग) 1.010040 \quad (घ) 0.4969$$

$$(9) \quad (क) 121 \quad (ख) -\frac{1}{8} \left[ 3 + \frac{5}{3^4} \right]$$

$$(ग) 2 \quad (घ) 4^{n+1} - 8^{n+1}$$

$$(ङ) (-2)^{n-3} [s-4]$$

$$(10) \quad 714$$

$$(17) \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{8}{9}}} \quad (18) \sqrt{3}$$

$$(19) 2\sqrt{2} \quad (20) (9\sqrt{3}-3)$$

$$(21) y = 1 - 1^2 + 1^3 - 1^4 + \dots$$

$$(22) y = \frac{1}{2} 1 - \frac{1 \times 3}{2 \times 4} 1^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} 1^3 - \dots$$

### प्रश्नावलि १९

$$(1) 1, 3, -1, -2, -4 \quad (2) 3, 4$$

$$(3) 4, 5, -4 \quad (4) (क) 4 (ख) 6 (ग) 6 (घ) \frac{1}{42}$$

$$(5) (अ) \frac{3}{4} \text{ छेक} + 7 \text{ छेख} - 1 \text{ छेग}$$

$$(आ) \text{ छेक} - 3 \text{ छेख} + 2 \text{ छेग}$$

$$(इ) - \text{छेक} + 3 \text{ छेख} + 6 \text{ छेग}$$

$$(ई) \text{ छेक} + 11 \text{ छेख} - \frac{18}{3} \text{ छेग}$$

(८) (क) ३ (ख) ५ (ग) -१ (घ) -३ (ङ) -६

(९)  $\frac{\text{छक}}{\text{छेल}-\text{छरु}}$

(१०)  $y = १.४६५$  (११)  $y = २.५६९$

(१२)  $y = ०, r = ०$ ;  $y = ४, r = २$

(१३)  $y = १६.६३$

(१४)  $y = १०$  के  $[क + ख]$ ,  $r = १०$  के  $(क - ख)$

### प्रश्नावलि २०

(१)  $१ - \frac{y}{२} + \frac{y^2}{३} - \frac{y^3}{४} + \frac{y^4}{५} - \dots$

(२)  $घा \left[ १ + y + \frac{२y^2}{२} + \frac{५y^3}{३} + \frac{१५y^4}{४} + \dots \right]$

(३)  $y - \frac{y^2}{३} + \frac{y^3}{५} - \frac{y^4}{७} + \dots$

(५)  $(-)^n \left[ \frac{१}{n} + \frac{२}{n-१} + \frac{३}{n-२} \right]$

$$(૬) \frac{1}{1-k} [y - y^k] \quad (૭) y + y^{-1} - 2$$

$$(૧૦) (અ) y^2 - y \quad (બા) \frac{3y}{2} \quad (૬) y$$

$$(૬) ૫ y \quad (૩) ૩ y \quad (૭) ૫ y - ૩$$

$$(૧૧) 3y - \frac{5y^2}{2} + \frac{9y^3}{3} - \frac{17y^4}{4} + \dots$$

$$(૧૨) \frac{k+xy}{y} - \frac{k^2+xy^2}{2y^2} + \frac{k^3+xy^3}{3y^3} - \dots$$

$$(૧૬) (અ) 1 - 2x \quad (બા) 1 - 2x^2$$

$$(૬) 2x - \frac{1}{2} \quad (૬) 2x^2$$

$$(૧૭) y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$(૧૯) 1840960$$

### પ્રશ્નાવલિ ૨૧

$$(૧) ૧૧ \quad (૨) ૦ \quad (૩) -૮ \quad (૪) -૫$$

$$(૫) kxg + 2xh - kx^2 - xh^2 - gk^2$$

$$(૬) ૦ \quad (૭) ૦ \quad (૧૦) ૦$$

# पारिभाषिक-शब्दावलि

## आंगल—हिंदी

absurd असंगत	ascending आरोही
according as तदनुसार	assumption करपना
accuracy परिशुद्धता	base आधार
addition योग, सकलन	binomial द्विपद
adjustment व्यवस्थापन	binomial coefficient द्विपद
algebraic बीजीय	गुणक
aliter अन्यथा	binomial theorem द्विपद
alternately एकान्तर से	प्रमेय
alternative विरुद्ध	bracket अभिवार
anti logarithm प्रतिच्छेदा	calculation परिगणन
apparatus साधन	cancel विलोपन, लोप करना
arithmetical progression	case प्रकार, दशा
समान्तर श्रेढी	change परिवर्तन
arithmetico geometrico-	characteristic लक्षण
series समान्तर गुणोत्तर श्रेढी	choice चरण, चुनाव
arithmetic mean समान्तर	classification वर्गीकरण
मध्यक	coefficient गुणक
arrangement arrange विन्यास	co factor सहगुणक
करना	column स्तम्भ
arrow धार	columnwise स्तम्भानुसार
article अनुच्छेद	combination संयोज

commensurable સંમેય	cube root ઘન મૂલ
committee સમિતિ	dash પ્રાસ
common difference પ્રચય	decimal દશમિક
common factor સમાપત્તેજ	decimal fraction દશમિક
common ratio સાધારણ નિપત્તિ	definite પરિમિત
common system સામાન્ય પદ્ધતિ	definition પરિમાદા
complementary સપૂરક	degree of accuracy પરિશુદ્ધતા કી માત્રા
completely પૂર્ણ રૂપેણ	delete અપમાર્જન
complex સંકર	denominator હર
complex quantity સંકર રાશિ	denote અભિધાન કરના
condition પ્રતિપદ્ય	dependent પરતત્ર
conditional equation પ્રતિપદ્યી સમીકરણ	descending અપરોહી
conjugate અનુબદ્ધ	determinant નિર્ણાયક
conjugate quadratic surd અનુબદ્ધ વર્ગ કરણી	development વિકાસ
consecutive અનુગામી	diagonal ત્રિકર્ણ
constant અચળ	diagonally opposite ત્રિકર્ણત સમુલ્લ
constant term અચળ પદ	digit અંક
constituent મંદપટક	dimension વિમા
contain ધસ્તધારણ	direct multiplication પ્રત્યક્ષ ગુણન
convergence અભિસાર	discriminant વિવેચક
convergent અભિસારી	discussion પર્યાલોચન
corollary હસપ્રત્યેય	dissimilar અસમરૂપ
correct શુદ્ધ	divergence અપસાર
corresponding સંવાદી	divergent અપસારી
cross multiplication ત્રિયોગ ગુણન	dividend ભગ્ય
	eliminant નિરસન ફલ

elimination निरसन	finite परिमित
equality समता	finite quantity परिमित राशि
equate समीकरण करना	finite series सान्त श्रृंखला
equation समीकरण	form रूप
equidistant समदूर	formula सूत्र
equivalent समार्थ	fraction भिन्न
even युग्म	fractional भिन्नीय
evolution मूल क्रिया	function श्रित**
exactly सुतथ्यत	fundamental मूलभूत
exactness सुतथ्या	generally सामान्यत
expansion विस्तार	general term सामान्य पद
exponential equation घात समीकरण	geometrical progression गुणोत्तर श्रृंखला
exponential series घातक श्रृंखला	geometric mean गुणोत्तर मध्यक
express व्यक्त करना	greatest महत्तम
expression व्यञ्जक, पदसंहति	group समूह
extraction of a root यगमूल निस्तारण	harmonic progression हरात्मक श्रृंखला
factor लघु	harmonic mean हरात्मक मध्यक
factorial हत *	

\* The 'product' of all the integers in serial order from one onwards

\*\* A quantity which takes on a definite value, or values when special values are assigned to certain other quantities called the argument or independent variables of the function. This term is used mostly to point out *dependence* on some certain variable or variables. Mathematics Dictionary by G. James and R. C. James 'dependent from root' श्रित to depend on from which the noun आश्रय is well known

homogeneous समानघात	integral अनुकल, पूर्णांक
homogeneous equation समानघात समीकार	integral part पूर्णार् भाग,
homogeneous function समानघात ध्रुव	anukal भाग
hypotenuse वर्ण (ancient word)	interchange व्यतिहरण,
hypothesis उपकल्पना	vychihar
identical सजाँग सम	interpretation निर्वाचन
identity ऐक्यत्व	inverse व्युत्क्रम
illustrative निदर्शनात्मक	investigation अनुसन्धान
imaginary काल्पनिक	involution घात श्रिया
imaginary part काल्पनिक घटक	irrational अपरिमयेय
incommensurable असमेय	kind प्रकार
incommensurability असमेयता	known ज्ञात
increase वर्धन	last term अन्त पद
indefinite अपरिमित, अनियत	law नियम
independent स्वतन्त्र	laws of indices घातांक नियम
index घातांक	leading constituent सप्र
infinite अनन्त	sapadk
infinite series अनन्त श्रेणी	leading diagonal सप्र विकर्ण
" अनन्ती	left hand side पामपक्ष
निवेशन	like सजातीय समरूप
instructive बोधात्मक	limit सीमा
in the limit सीमा में, सीमान्ती	linear रेखीय, एकघात
	linear equation रेखीय
	samīkar
	logarithm छेदा
	logarithmic series छेदा श्रेणी
	magnitude महत्ता

\* The figure letter or expression अंक showing the power घात of a quantity



mantissa दशमिकांश *	part घटक
mathematical induction गणितीय अनुमान	partial product आंशिक गुणन-फल
mean मध्यक	partly अंशतः
mean difference मध्यकान्तर	permutation क्रमव्य
middle term मध्य पद	polynomial बहुपद
minor उप निश्चायक * *	power घात
minus विरुद्ध	preceding पूर्वगामी
modulus मापाक	prismatic colours माधेनिक वर्ण
monomial एक पद	process विधा
multiple अपवर्त्य (प्राचीन शब्द)	progression श्रेढी
natural number प्राकृतिक संख्या	proof उपपत्ति
natural logarithm प्राकृतिक लघु	proper fraction लघ्वश भिन्न
negligible उपेक्ष्य, नगण्य	proportional अनुपाती
non recurring अनावर्ती	proposition माध्य
note आलोक, टिप्पणी	prove उपपादन करना
notation संकेतना	quadratic बर्गाय, द्विघात
number संख्या	quadratic equation द्विघात समीकरण
numerical संख्यात्मक	quadratic expression द्विघात पदसमूह
numerically संख्या की दृष्टि से	quadratic function द्विघात फलित
observation अवलोकन	quadratic surd द्विघात चरणी
old अयुग्म	
order अनुक्रम, क्रम, वर्ण	
pair युग्म	

decimal दशमिक part अंश of a logarithm hence  
दशमिकांश

\* \* minor determinant

quantity राशि  
 quotient लब्धि भागफल  
 radical मूल  
 radical sign मूल चिह्न  
 ratio निःपत्ति  
 rational परिमेय  
 rationalisation परिमेयकरण  
 rationalise परिमेय करना  
 rationalisation fact परिमेय  
 कारक गुणक  
 real वास्तविक  
 real part वास्तविक घटक  
 realisation हेतु पूर्णविन्यास  
 reciprocal व्युत्क्रम  
 reciprocal relation व्युत्क्रम  
 समीकार  
 recurring decimal आवर्त  
 दशमिक  
 reduction प्रहामन  
 reference अभ्युद्देश  
 repeat पुनरावृत्तिकरण  
 represent प्रतिनिधान करना  
 required अपेक्षित, इष्ट  
 respectively क्रमशः  
 rest शिथिल  
 restricted निबद्ध  
 restriction निबध्द  
 reverse order उल्टाक्रम  
 right hand side दक्षिण पक्ष  
 root मूल

row पंक्ति  
 rule of cross multiplication  
 नियम गुणन का नियम  
 same order समवर्ण  
 satisfy समाधान करना  
 selection प्रचरण, चुनाव  
 separately अलग-अलग  
 series श्रृंखला  
 set कुट्टक  
 side पक्ष  
 signal संकेति  
 significant मार्थक  
 similar समरूप  
 simplify सरल करना  
 simultaneous equation  
 युगपत समीकार  
 solution साधन  
 solve साधन करना  
 square वर्ग करना  
 stage प्रक्रम  
 standard प्रमाण  
 statement आवेदन  
 station स्थान (प्राचीन शब्द)  
 substitution आदेश  
 subtraction वियोग  
 suggestion पूर्वानुपरीता  
 suggestion पूर्वानुपरी  
 sufficient पर्याप्त  
 suffice पादाक  
 summation योग करण

suppress निग्रहण करना	theorem प्रमेय
surd कर्णी	transformation रूपान्तरण
symbol प्रतीक	transposition पक्षान्तरण
symmetry समिति	trinomial त्रिपद
symmetrical equation	type प्ररूप
समितीय समीकार	unknown अज्ञात
symmetrical function	unlike विजातीय
समितीय धित	up to infinity पावडननि
table सारणी	value गर्न
tedious दीर्घसूत्री	vanish होय होना
telegraph apparatus दूरलिप	variable चल
माधिन	verification गत्यापन
tend to प्रवृत्त	verify सत्यापन करना
term पद	very small अत्यल्प

### Notations

$nP_r$ सकन	$[1 - 1]$ न $[1 - 1]$
$nC_r$ सचन	$L^*$ सी
$n$ न	$n \rightarrow \infty$ न $\rightarrow \infty$
(factorial $n$ ) (नन स)	$\epsilon$ (cube root of unity)
$\infty$ य	ओ (गुरु का घन मूल)
$n$ (base of natural logs : thm) या [प्राकृतिक छेदा का आधार]	$S$ (for -nm) यो [योग]

# पारिभाषिक-शब्दावलि

## हिन्दी—आंग्ल

अक्ष नमूना	अन्त पद last term
अक्षत partly	अन्तर difference
अक्ष विकर्ण leading diagonal	अन्तर्धारण contain
अक्ष सघटक leading coefficient	अन्यथा aliter
अचर constant	अपरिमेय irrational
अज्ञात unknown	अपरत्य multiple
अत्यल्प very small	अपसार divergence
अनन्त infinite	अपसारी divergent
अनन्त श्रेणी infinite series	अपेक्षित required
अनन्ती infinity	अभिधान करना to denote
अनन्तर non recurring	अभिवार brackets
अनुकत integral	अभिसार convergence
अनुकत भाग integral part	अभिसारी convergent
अनुक्रम order	अभ्युद्देश reference
अनुगामी consecutive	अयुग्म odd
अनुच्छेद article	अर्हा value
अनुपाती proportional	अवरोही descending
अनुयुक्त conjugate	अवलोकन observation
अनुयुक्त वर्ग करणी conjugate	अव्यक्त unknown
quadratic surd	असंगत absurd
अनुसंधान investigation	असमरूप unlike, dissimilar

असमेय incommensurable  
 असमेयता incommensur-  
 ability  
 असीम without limit  
 आंशिक गुणनफल partial  
 product  
 आदेश substitution  
 आरोही ascending  
 आलोक note  
 आवर्त दशमिक recurring  
 decimal  
 आवर्त होना to recur  
 आवेदन statement  
 उल्लेख reverse order  
 उपकल्पना hypothesis  
 उपनिश्चायक minor  
 उपपत्ति proof  
 उपपादन करना prove  
 उपप्रमेय corollary  
 उपेक्ष्य negligible  
 रूढ़िवात linear  
 रूढ़िपद monomial  
 एकान्तर मे alternately  
 एकैकदा separately  
 त्रिकोण identity  
 करणी surd  
 कल्पना assumption  
 काल्पनिक घटक imaginary  
 part

काल्पनिक राशि imaginary  
 quantity  
 कुलक set  
 क्रम order  
 क्रमचय permutation  
 क्रमशः respectively  
 खण्ड factor  
 गणितीय अनुमान mathematical  
 induction  
 गुणक coefficient  
 गुणोत्तर मध्यक geometric  
 mean  
 गुणोत्तर श्रेणी geometrical  
 progression  
 घटक part  
 घात power  
 घात क्रिया involution  
 घात समीकरण exponential  
 equation  
 घातांक नियम laws of Indices  
 घातांक श्रेणी exponential series  
 चल variable  
 चुनाव selection  
 छद्म logarithm  
 छेदा श्रेणी logarithmic series  
 तत्काल immediately  
 मनुसार according as  
 तिर्यग् गुणन या नियम rule of  
 cross multiplication

त्रिपद trinomial	पक्ष side
दक्षिण पक्ष right hand side	पद्मान्तरण transposition
दशमिक decimal	पंक्ति row
दशमिक भिन्न decimal fraction	पद term
दशमिकांश mantissa	पदमहति expression
दीर्घ सूत्री tedious	परतः dependent
दूरिचित्र वाहिनी telegraph apparatus	परिगणन calculation
द्विघात quadratic	परिभाषा definition
द्विघात पदमहति quadratic expression	परिमित राशि finite quantity
द्विघात श्रित quadratic function	परिमेय rational
द्विघात समीकरण quadratic equation	परिमेयकरण rationalisation
द्विपद binomial	परिमेय करना rationalise
द्विपद गुणक binomial coefficient	परिमेय कारक rationalising factor
द्विपद प्रमेय binomial theorem	परिवर्तन change
द्विपद विस्तार binomial expansion	परिशुद्धता accuracy
नगण्य negligible	पर्याप्त sufficient
निबद्ध restrictive	पान्तर suffix
निषेध restriction	पुनरावृत्त repeated
निरसन elimination	पुनर्विन्वयन rearrangement
निश्चय interpretation	पूर्वगामी preceding
निवेश insertion	पूर्ण integral
निर्णायक determinant	पूर्वानुपर unnecessary
निरपत्ति ratio	पूर्वानुपरता succession
	प्रक्रम stage
	प्रचय common difference
	प्रतिच्छेद antilogarithm
	प्रतिनिधान करना to represent
	प्रतिबंध condition

प्रतिबंधी समीकरण conditional equation	मापांक modulus
प्रतिस्थापन replacement	मूल root, radical
प्रतीक symbol	मूल क्रिया evolution
प्रत्यक्ष गुणन direct multiplication	मूल चिह्न radical sign
प्रमाण standard	मूल मूल fundamental
प्रमेय theorem	यष्टि yard
प्ररूप type	यावदनन्ति up to infinity
प्रचरण selection	युगपत समीकरण simultaneous equation
प्रवृत्त tend to	युग्म even, pair
प्रहामन reduction	योग addition
प्राकृतिक छेदा natural logarithm	योग करण summation
प्राकृतिक भ्रष्टा natural number	योग करना to sum
प्राय dash	राशि quantity
फल result	रूपान्तरण transformation
बहुपद polynomial	रेखीय linear
बीजीय algebraic	रेखीय समीकरण linear equation
बोधायक instructive	लक्षण characteristic
भाजन करना to divide	लच्छश भिन्न proper fraction
भाज्य dividend	लब्धि quotient
भिन्न fraction	लोप करना to cancel
भिन्नीय fractional	लोप होना vanish
मध्यक mean	उर्ग square
मध्यमान्तर mean difference	वर्ग मूल निम्पारण extraction of a root
मध्यपद middle term	वर्गीकरण classification
महत्तम greatest	उर्गाय quadratic
महत्ता magnitude	वर्ग or ler
	वर्धन increase
	वामपक्ष left hand side

वास्तविक घटक real part  
त्रिकर्ण diagonal  
विकल्प alternative  
विजालीय unlike  
विधा process  
विन्यस्त करना to arrange  
विन्यास arrangement  
वियुक्त minus  
वियोग subtraction  
विवेचक discriminant  
व्यक्त करना express  
व्यञ्जक expression  
व्यतिहरण interchange  
व्यवस्थापन adjustment  
व्युत्क्रम reciprocal  
व्युत्क्रम समीकरण reciprocal  
equation  
शर arrow  
शुद्ध correct  
श्रित function  
श्रेणी progression series  
समान्य corresponding  
संकर complex  
संकर राशि complex quantity  
सकलन addition  
संकेतना notation  
संख्या number  
संख्या की दृष्टि से numerically  
संख्यात्मक numerical  
संघटक constituent

संयोज combination  
संज्ञा signal  
सत्यापन verification  
सत्यापन करना verify  
समता equality  
समदूर equidistant  
समवर्ण same order  
समाधान करना to satisfy  
समान घात homogeneous  
समानघात समीकरण homogeneous  
equation  
समानघात द्वित homogeneous  
function  
समान्तर मध्यक arithmetic  
mean  
समान्तर श्रेणी arithmetical  
progression  
समान्तर गुणोत्तर श्रेणी arithmo-  
ticogeometric progression  
समापवर्तक common factor  
समार्ह equivalent  
समिति committee  
समीकरण equate  
समीकरण equation  
समूह group  
संपूरक complementary  
समिति symmetrical  
समितीय asymmetrical  
समितीय श्रित symmetrical  
function



समितीय समीकार symmetrical equation	सारणी table
संमेय commensurable	साध्यक significant
सरल करना to simplify	सीमा limit
सरांग सम identical	सीमान्ती in the limit
सहगुणक cofactor	सीमा में in the limit
साक्षेत्रिक वर्ण prismatic colours	सुतथ्यत exactly, exactness
साधन solution	सूत्र formula
साधन करना to solve	स्तम्भ column
साधारण निष्पत्ति common ratio	स्तम्भानुसार columnwise
साध्य proposition	स्वतन्त्र independent
सान्त श्रेणी finite series	हत factorial
सामान्यत generally	हर denominator
सामान्य पद general term	हरात्मक मध्यक harmonic mean
सामान्य पद्धति common system	हरात्मक श्रेणी harmonical progression

छेदा-प्रतिछेदा-सारण्यां

छेदा मारणी (logarithmic tables)

[illegible]



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100																								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

मुद्रक  
शिवरुमार चर्मा, एम्. ए.  
प्रबन्धक, आर्यभारती मुद्रणालय  
नागपुर.

## शुद्धिपत्र

पृष्ठ संख्या	पंक्ति	अशुद्ध	शुद्ध
२१	१४	$(य_2)^{2+0}$	$\left[\frac{य}{य_0}\right]^{2+0}$
२२	३	$(य_0)$	$(य_0)^2$
५९	८	$क = अ \left[ \frac{अ}{आ} \right]^{\frac{त-१}{त-य}}$	$क = अ \left[ \frac{आ}{अ} \right]^{\frac{त-१}{त-य}}$
७३	१३	से १ अधिक	से १ से अधिक
७५	९	से १ न्यून	से १ से न्यून
७८	१	$\frac{१}{१ - \frac{२}{७}}$	$\frac{१}{१ - \frac{१}{७}}$
८०	१२	द = तथथथ ..	द = तथथथ...
८०	१४	तथ × थथथ ..	तथ थथथ
८८	९	राशियों थीच	राशियों के थीच
१२८	८	$कय^2 + खक + ग = ०$	$कय^2 + खय + ग = ०$
१३१	३	अर्थात् $र < ३$	$र > ३$
१३६	६	$(कय + र + छ)$	$(कय + जर + छ)$
२३२	९	सख, र यम-१	सख, र यम-१



पृष्ठ-संख्या	श्लोकां	अशुद्ध	शुद्ध
२३३	३	३य	२य
२३९	४	सत	सन्त-१
२४१	९	ट घ पूर्णांक	ट घन पूर्णांक
२४१	२३	$सज, य^2(१+य)^2$	$सज, य^2(१+य)^2$
२५०	५	$(-१) स$ $(स)^2$	$\frac{(-१)^2 स}{(स/५)^2}$
२७०	१६	$\frac{स(स-१)य}{१ \times २}$	$\frac{स(स-१)य^2}{१ \times २}$
२७०	१६	$\frac{स(स-१)(स-२)य}{१ \times २ \times ३}$	$\frac{स(स-१)(स-२)य^2}{१ \times २ \times ३}$
२८३	१०	$\left(+\frac{१}{१०^2}\right)$	$\left(-\frac{१}{१०^2}\right)$
२८४	१	$\left(+\frac{१}{१०^2}\right)^2$	$\left(-\frac{१}{१०^2}\right)^2$
२८९	६	३य <sup>२</sup> ४+य <sup>३</sup>	३य <sup>२</sup> +४य <sup>३</sup>
३१५	१५	$\left(+\frac{१}{य}\right)^१$	$\left(१+\frac{१}{स}\right)^१$
३१९	३	$३(-१)^{१-१}$	$३(-१)^{१-१}$
३१९	४	$\frac{स-१}{१}$	$\frac{स-२}{१}$
३२५	१३	$\frac{(२य)^2}{३}$	$\frac{(२य)^2}{३}$